

PROBĂ GRATUITĂ

105 Simulări pentru Bacalaureat la Matematică

Profil Mate-Info · Octavian Ghețu

3 simulări din carte, câte una de pe fiecare nivel de dificultate.

După fiecare simulare găsești **baremul** (ca la minister) și **rezolvarea explicată pas cu pas** a fiecărui exercițiu — exact ca în carte.

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică $M_mate-info$

Simularea 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I**(30 de puncte)**

5p	1. Calculați modulul numărului complex $z = \frac{5 - 15i}{1 + 3i}$.
5p	2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale. Știind că $f(0) = -3$ și $f(2) = 1$, determinați numerele a și b și calculați $f(5)$.
5p	3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x + 4) + \log_2(x + 8) = 5$.
5p	4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$, numărul $n(n + 1)$ să fie divizibil cu 3.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3, 6)$ și $B(3, -4)$. Determinați coordonatele punctului M pentru care $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
5p	6. Arătați că $\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea**(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 2 & m+2 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + (m+2)y + z = 5 \\ x + my + 2z = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$, unde m este număr real.
5p	a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
5p	b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.
5p	c) Pentru $m = -1$, arătați că sistemul este compatibil nedeterminat și determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $z_0 = -2$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y - 5$.
5p	a) Calculați $5 \circ (-7)$ și arătați că legea „ $\circ$ ” este asociativă.
5p	b) Determinați elementul neutru al legii „ $\circ$ ” și simetricul unui număr real x în raport cu legea „ $\circ$ ”.
5p	c) Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$, este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(\mathbb{R}, \circ)$.

SUBIECTUL al III-lea**(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.
5p	a) Arătați că $f'(x) = \ln x + 1$, $x \in (0, +\infty)$.
5p	b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .

5p	c) Demonstrați că $x \ln x \geq -\frac{1}{e}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + a, & x \leq 1 \\ \ln x + 2, & x > 1 \end{cases}$, unde a este număr real.
5p	a) Determinați numărul real a pentru care funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
5p	b) Pentru $a = 1$, determinați primitiva $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(0) = 0$.
5p	c) Pentru $a = 1$, demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $[-1, +\infty)$.

Simularea 1 · Rezolvări și barem

octavianghetu.ro

Simulare pentru examenul național de bacalaureat

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simularea 1

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = \frac{(5 - 15i)(1 - 3i)}{10} = \frac{-40 - 30i}{10} = -4 - 3i$ $ z = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$	3p 2p
2.	$b = f(0) = -3$ și $2a - 3 = 1$, deci $a = 2$ $f(5) = 2 \cdot 5 - 3 = 7$	3p 2p
3.	$(x + 4)(x + 8) = 2^5$, deci $x^2 + 12x = 0$ $x = 0$, care convine, iar $x = -12$ nu verifică condiția $x > -4$	3p 2p
4.	30 de cazuri posibile 20 de cazuri favorabile ($n \in \{3, 6, \dots, 30\}$ sau $n \in \{2, 5, \dots, 29\}$), deci $p = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$	2p 3p
5.	$3\vec{OA} + \vec{OB} = -6\vec{i} + 14\vec{j}$ $M(-6, 14)$	3p 2p
6.	$\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$ și $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 1 - 1 - 4 - 0$ $\det(A(1)) = 2$	3p 2p
b)	$\det(A(m)) = m + 1$ $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow m + 1 \neq 0$, deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	2p 3p
c)	$\text{rang } A(-1) = 2$ și $\Delta_c = 0$, deci sistemul este compatibil nedeterminat soluțiile sunt $(3 - \alpha, \alpha - 1, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, iar pentru $z_0 = -2$ obținem $(5, -3, -2)$	2p 3p
2.a)	$5 \circ (-7) = 5 - 7 - 5 = -7$ $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = x + y + z - 10$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$	2p 3p

b)	$x \circ e = x + e - 5 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $e = 5$	3p
	$x \circ x' = 5 \Leftrightarrow x' = 10 - x$	2p
c)	$f(x) \circ f(y) = (x + 5) + (y + 5) - 5 = x + y + 5 = f(x + y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$	3p
	f este bijectivă ($f(x) = y \Leftrightarrow x = y - 5$), deci f este izomorfism	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$	3p
	$f'(x) = \ln x + 1$	2p
b)	$f(1) = 0$ și $f'(1) = 1$	3p
	$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, deci ecuația tangentei este $y = x - 1$	2p
c)	$f'(x) < 0$ pe $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ și $f'(x) > 0$ pe $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, deci f este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$	2p
	$f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p
2.a)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 1 + a$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 2$	3p
	f admite primitive $\Leftrightarrow f$ este continuă în $x = 1 \Leftrightarrow a = 1$	2p
b)	$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + c_1$ pentru $x \leq 1$ și $F(x) = x \ln x + x + c_2$ pentru $x > 1$	2p
	$F(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$, iar continuitatea lui F în $x = 1$ dă $c_2 = \frac{1}{2}$	3p
c)	$F'(x) = f(x) > 0$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$	2p
	F este strict crescătoare pe $[-1, +\infty)$	3p

Rezolvări explicate**SUBIECTUL I**

- I.1** Ca să scriem z sub forma algebrică, amplificăm fracția cu conjugatul numitorului, adică cu $1 - 3i$:

$$z = \frac{(5 - 15i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)}$$

Calculăm numitorul, folosind formula $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ și $i^2 = -1$:

$$(1 + 3i)(1 - 3i) = 1 - 9i^2 = 1 + 9 = 10$$

Calculăm numărătorul, înmulțind termen cu termen:

$$(5 - 15i)(1 - 3i) = 5 - 15i - 15i + 45i^2$$

$$= 5 - 30i - 45 = -40 - 30i$$

Obținem:

$$z = \frac{-40 - 30i}{10} = -4 - 3i$$

Reamintim: modulul numărului complex $z = a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pentru $a = -4$ și $b = -3$ calculăm:

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Modulul numărului complex z este egal cu 5.

R: $|z| = 5$

- I.2** Folosim cele două condiții din enunț, pe rând.

Înlocuim $x = 0$ în expresia funcției:

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$

Din $f(0) = -3$ obținem $b = -3$.

Înlocuim $x = 2$ în expresia funcției și folosim $b = -3$:

$$f(2) = 2a + b = 2a - 3$$

Din $f(2) = 1$ obținem ecuația $2a - 3 = 1$.

Rezolvăm: $2a = 4$, deci $a = 2$.

Funcția este $f(x) = 2x - 3$, pentru orice număr real x .

Calculăm:

$$f(5) = 2 \cdot 5 - 3 = 10 - 3 = 7$$

Am obținut $a = 2$, $b = -3$ și $f(5) = 7$.

R: $a = 2$, $b = -3$, $f(5) = 7$

I.3 Punem condițiile de existență ale logaritmilor: argumentele trebuie să fie strict pozitive.

$x + 4 > 0$, adică $x > -4$, și $x + 8 > 0$, adică $x > -8$.

Ambele condiții sunt îndeplinite pentru $x \in (-4, +\infty)$.

Reamintim proprietatea $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab)$, adevărată pentru $a, b > 0$.

Aplicăm această proprietate în membrul stâng:

$$\log_2 ((x+4)(x+8)) = 5$$

Din definiția logaritmului, $\log_2 A = 5 \Leftrightarrow A = 2^5$, deci:

$$(x+4)(x+8) = 32$$

Desfacem parantezele:

$$x^2 + 8x + 4x + 32 = 32$$

$$x^2 + 12x = 0$$

Dăm factor comun pe x :

$$x(x+12) = 0, \text{ de unde } x = 0 \text{ sau } x = -12.$$

Valoarea $x = -12$ nu convine, deoarece nu verifică condiția $x > -4$.

Valoarea $x = 0$ verifică condiția; verificăm și ecuația: $\log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$.

Soluția ecuației este $x = 0$.

R: $x = 0$

I.4

Reamintim: $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$.

Mulțimea A are 30 de elemente, deci sunt 30 de cazuri posibile.

Căutăm cazurile favorabile. Numărul 3 este prim, deci divide produsul $n(n+1)$ dacă și numai dacă divide unul dintre factori:

$$3 \mid n(n+1) \Leftrightarrow 3 \mid n \text{ sau } 3 \mid n+1$$

Numerele din A divizibile cu 3 sunt 3, 6, 9, ..., 30, adică $30 : 3 = 10$ numere.

Numerele din A pentru care $n+1$ este divizibil cu 3 sunt 2, 5, 8, ..., 29, adică 10 numere.

Observăm că n și $n+1$ nu pot fi ambele divizibile cu 3, deoarece diferența lor este 1; deci cele două grupe nu au elemente comune.

Numărul cazurilor favorabile este:

$$10 + 10 = 20$$

Calculăm probabilitatea:

$$p = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Probabilitatea cerută este $p = \frac{2}{3}$.

R: $p = \frac{2}{3}$

I.5

Reamintim: vectorul de poziție al unui punct $P(x, y)$ este $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Scriem vectorii de poziție ai punctelor A și B :

$$\overrightarrow{OA} = -3\vec{i} + 6\vec{j} \text{ și } \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$$

Calculăm $3\overrightarrow{OA}$, înmulțind fiecare coordonată cu 3:

$$3\overrightarrow{OA} = -9\vec{i} + 18\vec{j}$$

Adunăm vectorii, coordonată cu coordonată:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= (-9 + 3)\vec{i} + (18 - 4)\vec{j} \\ &= -6\vec{i} + 14\vec{j} \end{aligned}$$

Coordonatele punctului M sunt coeficienții vectorului său de poziție.

Punctul căutat este $M(-6, 14)$.

R: $M(-6, 14)$

I.6 Reamintim valorile funcțiilor trigonometrice în unghiurile remarcabile folosite:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Calculăm produsul:

$$\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Calculăm pătratul:

$$\sin^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Adunăm rezultatele, aducând la numitorul comun 4:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

Am arătat că $\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}$.

R: $\frac{3}{4}$

SUBIECTUL al II-lea

II.1 a) Înlocuim $m = 1$ în matricea $A(m)$:

$$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Reamintim regula lui Sarrus: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Aplicăm regula lui Sarrus:

$$\begin{aligned} \det(A(1)) &= 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 0 \\ &= 0 + 6 + 1 - 1 - 4 - 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Am arătat că $\det(A(1)) = 2$.

b) Calculăm determinantul matricei $A(m)$ cu regula lui Sarrus:

$$\begin{aligned} \det(A(m)) &= 2 \cdot m \cdot 0 + (m+2) \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot m \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - (m+2) \cdot 1 \cdot 0 \\ &= 0 + 2m + 4 + 1 - m - 4 - 0 \\ &= m + 1 \end{aligned}$$

Reamintim: o matrice pătratică este inversabilă dacă și numai dacă determinantul ei este nenul.

Deci $A(m)$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det(A(m)) \neq 0$.

Rezolvăm condiția:

$$m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$$

Matricea $A(m)$ este inversabilă pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

c) Ideea: calculăm rangul matricei sistemului și determinantul caracteristic, apoi aplicăm teorema lui Rouché; la final rezolvăm sistemul cu o necunoscută secundară.

Pentru $m = -1$, sistemul devine:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x - y + 2z = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Din b), $\det(A(-1)) = -1 + 1 = 0$, deci rangul matricei sistemului este mai mic decât 3.

Calculăm minorul format din primele două linii și primele două coloane:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3 \neq 0$$

Deci $\text{rang } A(-1) = 2$, iar acest minor este minor principal.

Calculăm determinantul caracteristic, bordând minorul principal cu coloana termenilor liberi și linia a treia, cu regula lui Sarrus:

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 5 + 5 - 8 - 2 = 0$$

Reamintim teorema lui Rouché: sistemul este compatibil dacă și numai dacă toți determinanții caracteristici sunt nuli.

Singurul determinant caracteristic este nul, deci sistemul este compatibil.

Rangul (2) este mai mic decât numărul necunoscutelor (3), deci sistemul este compatibil nedeterminat.

Notăm necunoscuta secundară $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, și rezolvăm sistemul format din ecuațiile principale:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 - \alpha \\ x - y = 4 - 2\alpha \end{cases}$$

Adunăm ecuațiile: $3x = 9 - 3\alpha$, deci $x = 3 - \alpha$.

Din a doua ecuație obținem $y = x - 4 + 2\alpha = 3 - \alpha - 4 + 2\alpha = \alpha - 1$.

Soluțiile sistemului sunt $(3 - \alpha, \alpha - 1, \alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pentru $z_0 = -2$ luăm $\alpha = -2$ și obținem $x_0 = 3 - (-2) = 5$ și $y_0 = -2 - 1 = -3$.

Verificăm în cele trei ecuații: $2 \cdot 5 + (-3) + (-2) = 5$, $5 - (-3) + 2 \cdot (-2) = 4$, $5 + (-3) = 2$.

Am arătat că sistemul este compatibil nedeterminat, iar soluția cerută este $(x_0, y_0, z_0) = (5, -3, -2)$.

R: a) $\det(A(1)) = 2$; **b)** $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; **c)** $(x_0, y_0, z_0) = (5, -3, -2)$

II.2 a) Aplicăm definiția legii pentru $x = 5$ și $y = -7$:

$$5 \circ (-7) = 5 + (-7) - 5 = -7$$

Reamintim: legea „ $\circ$ ” este asociativă dacă $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Calculăm membrul stâng:

$$(x \circ y) \circ z = (x + y - 5) \circ z = (x + y - 5) + z - 5 = x + y + z - 10$$

Calculăm membrul drept:

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - 5) = x + (y + z - 5) - 5 = x + y + z - 10$$

Cele două rezultate coincid, deci $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Am obținut $5 \circ (-7) = -7$ și am arătat că legea „ $\circ$ ” este asociativă.

b) Observăm întâi că legea este comutativă:

$$x \circ y = x + y - 5 = y + x - 5 = y \circ x, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Reamintim: $e \in \mathbb{R}$ este element neutru dacă $x \circ e = e \circ x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Din comutativitate, este suficient să impunem $x \circ e = x$:

$$x + e - 5 = x \Leftrightarrow e = 5, \text{ iar } 5 \in \mathbb{R}.$$

Deci elementul neutru al legii este $e = 5$.

Reamintim: $x' \in \mathbb{R}$ este simetricul lui x dacă $x \circ x' = x' \circ x = e$.

Din comutativitate, este suficient să impunem $x \circ x' = 5$:

$$x + x' - 5 = 5 \Leftrightarrow x' = 10 - x, \text{ iar } 10 - x \in \mathbb{R}.$$

Elementul neutru este $e = 5$, iar simetricul numărului real x este $x' = 10 - x$.

c) Ideea: arătăm că f este morfism de grupuri și că este bijectivă.

Din a) și b), legea „ $\circ$ ” este asociativă, are elementul neutru $e = 5$ și orice număr real are simetric, deci $(\mathbb{R}, \circ)$ este grup.

Reamintim: f este morfism de la $(\mathbb{R}, +)$ la $(\mathbb{R}, \circ)$ dacă $f(x + y) = f(x) \circ f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Calculăm membrul stâng:

$$f(x + y) = x + y + 5$$

Calculăm membrul drept:

$$f(x) \circ f(y) = (x + 5) \circ (y + 5) = (x + 5) + (y + 5) - 5 = x + y + 5$$

Deci $f(x + y) = f(x) \circ f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, adică f este morfism.

Verificăm bijectivitatea: pentru orice $y \in \mathbb{R}$, ecuația $f(x) = y$, adică $x + 5 = y$, are soluția unică $x = y - 5 \in \mathbb{R}$.

Deci f este bijectivă, cu inversa $f^{-1}(y) = y - 5$.

Un izomorfism este un morfism bijectiv.

Am demonstrat că f este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(\mathbb{R}, \circ)$.

R: a) $5 \circ (-7) = -7$; **b)** $e = 5$, $x' = 10 - x$; **c)** $f(x + y) = f(x) \circ f(y)$ și f este bijectivă

SUBIECTUL al III-lea

III.1 a) Funcția f este produsul funcțiilor $u(x) = x$ și $v(x) = \ln x$, derivabile pe $(0, +\infty)$.

Reamintim regula de derivare a produsului: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Folosim derivatele $(x)' = 1$ și $(\ln x)' = \frac{1}{x}$:

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \ln x + 1, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty)$$

Am arătat că $f'(x) = \ln x + 1$.

b) Reamintim: ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0 este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Calculăm valoarea funcției în $x_0 = 1$:

$$f(1) = 1 \cdot \ln 1 = 0$$

Calculăm valoarea derivatei, folosind a):

$$f'(1) = \ln 1 + 1 = 1$$

Înlocuim în ecuația tangentei:

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$$

Ecuația tangentei este $y = x - 1$.

c) Ideea: arătăm că $-\frac{1}{e}$ este valoarea minimă a funcției f , studiind monotonia cu ajutorul semnelui derivatei.

Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$:

$$\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Reamintim: dacă $f' < 0$ pe un interval, f este strict descrescătoare pe el; dacă $f' > 0$, f este strict crescătoare.

Funcția $\ln$ este strict crescătoare, deci putem compara $\ln x$ cu $-1 = \ln \frac{1}{e}$.

Pentru $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ avem $\ln x < -1$, adică $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{1}{e}\right]$.

Pentru $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ avem $\ln x > -1$, adică $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Rezultă că $x = \frac{1}{e}$ este punctul de minim al funcției f , deci $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

Calculăm valoarea minimă:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e}$$

Am demonstrat că $x \ln x \geq -\frac{1}{e}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

R: a) $f'(x) = \ln x + 1$; **b)** $y = x - 1$; **c)** minimul lui f este $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

III.2

a) Ideea: o funcție cu discontinuitate de prima speță nu admite primitive, iar o funcție continuă admite; deci studiem continuitatea lui f .

Pe $(-\infty, 1)$, $f(x) = x + a$ este funcție de gradul I, iar pe $(1, +\infty)$, $f(x) = \ln x + 2$ este sumă de funcții continue.

Deci f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Studiem continuitatea în $x = 1$. Calculăm limitele laterale:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x + a) = 1 + a = f(1)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (\ln x + 2) = \ln 1 + 2 = 2$$

Dacă $1 + a \neq 2$, limitele laterale în $x = 1$ sunt finite și diferite, deci $x = 1$ este punct de discontinuitate de prima speță.

Reamintim: o funcție care admite primitive are proprietatea lui Darboux, iar o funcție cu discontinuitate de prima speță nu are această proprietate; deci în acest caz f nu admite primitive.

Dacă $1 + a = 2$, funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, iar orice funcție continuă admite primitive.

Deci f admite primitive dacă și numai dacă $1 + a = 2$.

Numărul căutat este $a = 1$.

b) Pentru $a = 1$, $f(x) = x + 1$ pentru $x \leq 1$ și $f(x) = \ln x + 2$ pentru $x > 1$, iar din a) f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Căutăm primitivele pe fiecare ramură. O primitivă a funcției $x + 1$ este $\frac{x^2}{2} + x$.

Din regula de derivare a produsului, $(x \ln x)' = \ln x + 1$, deci $(x \ln x + x)' = \ln x + 1 + 1 = \ln x + 2$.
Deci o primitivă a funcției $\ln x + 2$ pe $(1, +\infty)$ este $x \ln x + x$.

Scriem forma generală: $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + c_1$ pentru $x \leq 1$ și $F(x) = x \ln x + x + c_2$ pentru $x > 1$, cu $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Din $F(0) = 0$ obținem $0 + 0 + c_1 = 0$, deci $c_1 = 0$.

Funcția F este derivabilă, deci este continuă în $x = 1$. Calculăm:

$$F(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \text{ și } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} F(x) = 1 \cdot \ln 1 + 1 + c_2 = 1 + c_2$$

$$\text{Din } 1 + c_2 = \frac{3}{2} \text{ obținem } c_2 = \frac{1}{2}.$$

Verificăm derivabilitatea în $x = 1$. Derivata la stânga este $F'_s(1) = 1 + 1 = 2$.

La dreapta, limita $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x \ln x + x - 1}{x - 1}$ este de tipul $\frac{0}{0}$, deci aplicăm regula lui l'Hospital:

$$F'_d(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x \ln x + x - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (\ln x + 2) = 2$$

Deci $F'(1) = 2 = f(1)$, iar F este primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

$$\text{Primitiva căutată este } F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x, & x \leq 1 \\ x \ln x + x + \frac{1}{2}, & x > 1 \end{cases}.$$

c) Ideea: derivata oricărei primitive este f ; arătăm că f este pozitivă pe $[-1, +\infty)$ și deducem monotonia.

Fie F o primitivă a funcției f . Atunci F este derivabilă și $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Studiem semnul funcției f pe $[-1, +\infty)$:

pentru $x \in (-1, 1]$, $f(x) = x + 1 > 0$;

pentru $x > 1$, $\ln x > 0$, deci $f(x) = \ln x + 2 > 2 > 0$;

în $x = -1$, $f(-1) = -1 + 1 = 0$.

Deci $F'(x) > 0$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.

Fie $-1 \leq u < v$. Reamintim teorema lui Lagrange: dacă F este derivabilă, există $c \in (u, v)$ astfel încât $F(v) - F(u) = F'(c)(v - u)$.

Cum $c > u \geq -1$, avem $F'(c) > 0$; și $v - u > 0$, deci $F(v) - F(u) > 0$, adică $F(u) < F(v)$.

Am demonstrat că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $[-1, +\infty)$.

R: a) $a = 1$; **b)** $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$ pentru $x \leq 1$, $F(x) = x \ln x + x + \frac{1}{2}$ pentru $x > 1$; **c)** $F'(x) = f(x) > 0$ pe $(-1, +\infty)$

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică M_{mate-info}

Simularea 46

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I**(30 de puncte)**

5p	1. Arătați că $(\sqrt{3} + i)^6 = -64$, unde $i^2 = -1$.
5p	2. Se consideră ecuația $x^2 + (2m - 1)x + m = 0$, unde m este număr real, cu soluțiile x_1 și x_2 . Determinați o relație între $x_1 + x_2$ și x_1x_2 , care nu depinde de m .
5p	3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x - 2) + \log_3(x + 4) = 3$.
5p	4. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ care au suma elementelor număr par.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1 : (m + 3)x + 4y - 1 = 0$ și $d_2 : x + my + 3 = 0$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.
5p	6. Calculați aria triunghiului ABC în care $AB = 9$, $AC = 8$ și $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea**(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & m-1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x - y + mz = -1 \\ -x + y + z = 1 \\ 2x + (m-1)y - 2z = 1 \end{cases}$, unde m este număr real.
5p	a) Arătați că $\det(A(0)) = -2$.
5p	b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.
5p	c) Determinați numerele întregi m pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) , cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.
	2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z \circ w = zw - iz - iw - 1 + i$.
5p	a) Arătați că $z \circ w = (z - i)(w - i) + i$, pentru orice numere complexe z și w .
5p	b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
5p	c) Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $z \circ z \circ z = -8 + i$.

SUBIECTUL al III-lea**(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.
5p	a) Arătați că $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, $x \in (1, +\infty)$.
5p	b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .

5p	c) Demonstrați că $x \geq e \ln x$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 $.
5p	a) Calculați $\int_0^2 f(x) dx$.
5p	b) Calculați $\int_0^3 x \cdot f(x) dx$.
5p	c) Determinați numărul real a , $a \geq 1$, pentru care $\int_0^a f(x) dx = \frac{5}{2}$.

Simularea 46 · Rezolvări și barem

octavianghetu.ro

Simulare pentru examenul național de bacalaureat

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simularea 46

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\sqrt{3} + i)^3 = 8i$ $(\sqrt{3} + i)^6 = (8i)^2 = -64$	3p 2p
2.	$x_1 + x_2 = 1 - 2m, x_1 x_2 = m$ $x_1 + x_2 + 2x_1 x_2 = 1$	2p 3p
3.	$(x - 2)(x + 4) = 27 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 35 = 0$ $x = 5$, care convine, iar $x = -7$ nu verifică condițiile de existență	3p 2p
4.	suma este pară dacă submulțimea are 0 sau 2 elemente impare $C_4^3 + C_4^1 \cdot C_5^2 = 4 + 40 = 44$	2p 3p
5.	$(m + 3)m - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 = 0$ $m \in \{-4, 1\}$, pentru care dreptele nu coincid	3p 2p
6.	$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ}{2}$ $\mathcal{A}_{ABC} = 18$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(0)) = -4 - 2 + 0 - 0 + 2 + 2$ $\det(A(0)) = -2$	3p 2p
b)	$\det(A(m)) = -(m + 1)(m + 2)$ $A(m)$ inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m)) \neq 0$, deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$	2p 3p
c)	$y_0 = \frac{3}{m + 1}, z_0 = \frac{m - 2}{(m + 1)(m + 2)}, x_0 = \frac{2 - m}{m + 2}$ $m + 1 \in \{-3, -1, 1, 3\}$ și $m \neq -2$ verificarea, deci $m \in \{-4, 0, 2\}$	2p 2p 1p
2.a)	$(z - i)(w - i) + i = zw - iz - iw + i^2 + i$ $i^2 = -1$, deci se obține $z \circ w$	3p 2p
b)	$(z - i)(e - i) = z - i$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$ $e = 1 + i$, care verifică $z \circ e = e \circ z = z$	2p 3p

c)	$z \circ z \circ z = (z - i)^3 + i$	2p
	$(z - i)^3 = -8$, deci $z - i \in \{-2, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i\}$ și $z \in \{-2 + i, 1 + (1 + \sqrt{3})i, 1 + (1 - \sqrt{3})i\}$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$	3p
	$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{x}{\ln x} = +\infty$	3p
	dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală	2p
c)	f este descrescătoare pe $(1, e]$ și crescătoare pe $[e, +\infty)$	2p
	$f(x) \geq f(e) = e$ și $\ln x > 0$, deci $x \geq e \ln x$	3p
2.a)	$\int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^2 (x - 1) dx$	3p
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$	2p
b)	$\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$	2p
	$\int_1^3 (x^2 - x) dx = \frac{14}{3}$, deci integrala este $\frac{29}{6}$	3p
c)	$\int_0^a f(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{(a - 1)^2}{2}$	3p
	$(a - 1)^2 = 4$ și $a \geq 1$, deci $a = 3$	2p

Rezolvări explicate

SUBIECTUL I

- I.1** Ca să ajungem la puterea a șasea, calculăm puterea a treia și o ridicăm la pătrat.
 Calculăm pătratul, cu $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ și $i^2 = -1$:
 $(\sqrt{3} + i)^2 = 3 + 2\sqrt{3}i + i^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$
 Calculăm cubul, înmulțind cu $\sqrt{3} + i$:
 $(\sqrt{3} + i)^3 = (\sqrt{3} + i)(2 + 2\sqrt{3}i)$
 $= 2\sqrt{3} + 6i + 2i + 2\sqrt{3}i^2$
 $= 2\sqrt{3} + 8i - 2\sqrt{3} = 8i$
 Folosim $z^6 = (z^3)^2$:
 $(\sqrt{3} + i)^6 = (8i)^2 = 64i^2 = -64$
 Am arătat că $(\sqrt{3} + i)^6 = -64$.
R: $(\sqrt{3} + i)^6 = -64$
- I.2** Reamintim relațiile lui Viète pentru ecuația $ax^2 + bx + c = 0$: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ și $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.
 Pentru ecuația dată avem $a = 1$, $b = 2m - 1$, $c = m$, deci:
 $x_1 + x_2 = -(2m - 1) = 1 - 2m$
 $x_1x_2 = m$
 Eliminăm parametrul m : din a doua relație $m = x_1x_2$, pe care îl înlocuim în prima:
 $x_1 + x_2 = 1 - 2x_1x_2$
 Relația căutată, care nu depinde de m , este $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 1$.
R: $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 1$
- I.3** Scriem condițiile de existență ale logaritmulor:
 $x - 2 > 0$ și $x + 4 > 0$, deci $x \in (2, +\infty)$.
 Folosim proprietatea $\log_3 a + \log_3 b = \log_3(ab)$, pentru $a, b > 0$:
 $\log_3((x - 2)(x + 4)) = 3$
 Din definiția logaritmului, $\log_3 A = 3 \Leftrightarrow A = 3^3$:
 $(x - 2)(x + 4) = 27$
 $x^2 + 2x - 8 = 27$
 $x^2 + 2x - 35 = 0$
 Calculăm discriminantul: $\Delta = 4 + 140 = 144$, deci $x_1 = \frac{-2 - 12}{2} = -7$ și $x_2 = \frac{-2 + 12}{2} = 5$.
 $x_1 = -7$ nu convine, deoarece nu verifică condiția $x > 2$.
 $x_2 = 5$ convine; verificăm: $\log_3 3 + \log_3 9 = 1 + 2 = 3$.
 Soluția ecuației este $x = 5$.
R: $x = 5$

- I.4** Împărțim elementele lui A după paritate: 4 numere pare (2, 4, 6, 8) și 5 numere impare (1, 3, 5, 7, 9). Observăm că suma a trei numere este pară dacă și numai dacă numărul termenilor impari este par, adică 0 sau 2.

Reamintim: numărul submulțimilor cu k elemente ale unei mulțimi cu n elemente este

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Cazul 1: submulțimi cu trei elemente pare:

$$C_4^3 = 4$$

Cazul 2: submulțimi cu un element par și două impare (alegem separat elementul par și cele două impare și înmulțim):

$$C_4^1 \cdot C_5^2 = 4 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 4 \cdot 10 = 40$$

Adunăm cele două cazuri, care nu au submulțimi comune:

$$4 + 40 = 44$$

Numărul submulțimilor căutate este 44.

R: 44

- I.5** Reamintim: dreptele $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sunt paralele (distincte) dacă $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ și dreptele nu coincid.

Pentru d_1 și d_2 avem $a_1 = m + 3$, $b_1 = 4$, $a_2 = 1$, $b_2 = m$. Scriem condiția:

$$(m + 3) \cdot m - 1 \cdot 4 = 0$$

$$m^2 + 3m - 4 = 0$$

$$(m - 1)(m + 4) = 0, \text{ deci } m \in \{-4, 1\}.$$

Verificăm că dreptele nu coincid.

Pentru $m = 1$: $d_1 : 4x + 4y - 1 = 0$, adică $x + y - \frac{1}{4} = 0$, și $d_2 : x + y + 3 = 0$; termenii liberi diferă, deci dreptele sunt paralele distincte.

Pentru $m = -4$: $d_1 : -x + 4y - 1 = 0$, adică $x - 4y + 1 = 0$, și $d_2 : x - 4y + 3 = 0$; dreptele sunt paralele distincte.

Valorile căutate sunt $m \in \{-4, 1\}$.

R: $m \in \{-4, 1\}$

- I.6** Cunoaștem două laturi și unghiul dintre ele, deci folosim formula ariei cu sinus.

Reamintim formula: $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}$.

Înlocuim datele:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ}{2}$$

Folosim $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{72 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

Aria triunghiului ABC este 18.

R: $\mathcal{A}_{ABC} = 18$

SUBIECTUL al II-lea

II.1 a) Înlocuim $m = 0$, deci $m - 1 = -1$:

$$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Reamintim regula lui Sarrus: $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Aplicăm regula:

$$\begin{aligned} \det(A(0)) &= 2 \cdot 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1) \cdot (-2) \\ &= -4 - 2 + 0 - 0 + 2 + 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Am arătat că $\det(A(0)) = -2$.

b) Reamintim: o matrice pătratică este inversabilă dacă și numai dacă determinantul ei este nenul.

Calculăm $\det(A(m))$ cu regula lui Sarrus:

$$\begin{aligned} \det(A(m)) &= 2 \cdot 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + m \cdot (-1) \cdot (m-1) - m \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (m-1) - (-1) \cdot (-1) \cdot (-2) \\ &= -4 - 2 - m^2 + m - 2m - 2m + 2 + 2 \\ &= -m^2 - 3m - 2 \end{aligned}$$

Descompunem: $m^2 + 3m + 2 = (m+1)(m+2)$, deci $\det(A(m)) = -(m+1)(m+2)$.

Punem condiția $\det(A(m)) \neq 0$: $m \neq -1$ și $m \neq -2$.

Valorile căutate sunt $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$.

c) Ideea: combinăm ecuațiile ca să eliminăm necunoscute, exprimăm soluția în funcție de m și punem condiția ca y_0 să fie întreg; apoi verificăm x_0 și z_0 .

Sistemul are soluție unică dacă și numai dacă $\det(A(m)) \neq 0$, adică $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$.

Adunăm a treia ecuație cu dublul celei de-a doua; se reduc x și z :

$$(m-1)y_0 + 2y_0 = 1 + 2, \text{ adică } (m+1)y_0 = 3, \text{ deci } y_0 = \frac{3}{m+1}.$$

Adunăm primele două ecuații; se reduce y :

$$x_0 + (m+1)z_0 = 0, \text{ deci } x_0 = -(m+1)z_0.$$

Din a doua ecuație, $x_0 = y_0 + z_0 - 1$. Egalăm cele două expresii ale lui x_0 :

$$-(m+1)z_0 = y_0 + z_0 - 1$$

$$(m+2)z_0 = 1 - y_0 = 1 - \frac{3}{m+1} = \frac{m-2}{m+1}$$

$$\text{Obținem } z_0 = \frac{m-2}{(m+1)(m+2)} \text{ și } x_0 = -(m+1)z_0 = \frac{2-m}{m+2}.$$

Dacă $y_0 \in \mathbb{Z}$, atunci $m+1$ este divizor al lui 3: $m+1 \in \{-3, -1, 1, 3\}$, deci $m \in \{-4, -2, 0, 2\}$.

$m = -2$ nu convine, deoarece pentru el sistemul nu are soluție unică.

Verificăm celelalte valori:

$$\text{Pentru } m = -4: y_0 = -1, z_0 = \frac{-6}{6} = -1, x_0 = \frac{6}{-2} = -3, \text{ deci } (x_0, y_0, z_0) = (-3, -1, -1) \text{ convine.}$$

$$\text{Pentru } m = 0: y_0 = 3, z_0 = \frac{-2}{2} = -1, x_0 = \frac{2}{2} = 1, \text{ deci } (x_0, y_0, z_0) = (1, 3, -1) \text{ convine.}$$

$$\text{Pentru } m = 2: y_0 = 1, z_0 = 0, x_0 = 0, \text{ deci } (x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0) \text{ convine.}$$

Numerele căutate sunt $m \in \{-4, 0, 2\}$.

R: a) $\det(A(0)) = -2$; **b)** $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$; **c)** $m \in \{-4, 0, 2\}$

II.2 a) Pornim de la membrul drept și desfacem parantezele:

$$(z - i)(w - i) + i = zw - iz - iw + i^2 + i$$

Folosim $i^2 = -1$:

$$= zw - iz - iw - 1 + i$$

$$= z \circ w, \text{ pentru orice } z, w \in \mathbb{C}.$$

$$\text{Am arătat că } z \circ w = (z - i)(w - i) + i.$$

b) Reamintim: $e \in \mathbb{C}$ este element neutru dacă $z \circ e = e \circ z = z$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Din a), $z \circ w = w \circ z$ (legea este comutativă), deci este suficient să cerem $z \circ e = z$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Scriem condiția folosind forma de la a):

$$(z - i)(e - i) + i = z$$

$$(z - i)(e - i) = z - i, \text{ pentru orice } z \in \mathbb{C}$$

Alegem $z = 1 + i$, pentru care $z - i = 1$: obținem $e - i = 1$, deci $e = 1 + i$.

Verificăm: $z \circ (1 + i) = (z - i) \cdot 1 + i = z$ și, prin comutativitate, $(1 + i) \circ z = z$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Elementul neutru al legii este $e = 1 + i$.

c) Ideea: forma de la a) arată că $z \circ w - i = (z - i)(w - i)$; deci compunerea de trei ori se scrie ca un cub.

Arătăm întâi că legea este asociativă, ca expresia $z \circ z \circ z$ să aibă sens. Pentru orice $z, w, u \in \mathbb{C}$:

$$(z \circ w) \circ u = (z \circ w - i)(u - i) + i = (z - i)(w - i)(u - i) + i$$

$$z \circ (w \circ u) = (z - i)(w \circ u - i) + i = (z - i)(w - i)(u - i) + i$$

Cele două expresii sunt egale, deci legea este asociativă.

Pentru $w = u = z$ obținem:

$$z \circ z \circ z = (z - i)^3 + i$$

Ecuația devine:

$$(z - i)^3 + i = -8 + i$$

$$(z - i)^3 = -8$$

Notăm $w = z - i$ și folosim $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$:

$$w^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (w + 2)(w^2 - 2w + 4) = 0$$

Din $w + 2 = 0$ obținem $w = -2$.

$$\text{Pentru } w^2 - 2w + 4 = 0: \Delta = 4 - 16 = -12, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}i, \text{ deci } w = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i.$$

Revenim la $z = w + i$.

Soluțiile ecuației sunt $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 1 + (1 + \sqrt{3})i$ și $z_3 = 1 + (1 - \sqrt{3})i$.

R: a) $(z - i)(w - i) + i = zw - iz - iw - 1 + i$; **b)** $e = 1 + i$; **c)** $z \in \{-2 + i, 1 + (1 + \sqrt{3})i, 1 + (1 - \sqrt{3})i\}$

SUBIECTUL al III-lea**III.1**

a) Reamintim regula de derivare a câtului: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Aplicăm regula cu $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$= \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}, \text{ pentru orice } x \in (1, +\infty).$$

Am arătat că $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.

b) Reamintim: dreapta $x = a$ este asimptotă verticală la graficul lui f dacă cel puțin una dintre limitele laterale ale lui f în a este infinită.

Funcția f este continuă pe $(1, +\infty)$, deci asimptota verticală poate exista doar în capătul $x = 1$ al domeniului.

Pentru $x \rightarrow 1, x > 1$: numărătorul tinde la 1, iar $\ln x \rightarrow 0$, cu $\ln x > 0$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0_+} = +\infty$$

Dreapta de ecuație $x = 1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .

c) Ideea: împărțind prin $\ln x > 0$, inegalitatea devine $f(x) \geq e$, deci arătăm că minimumul funcției f este e .

Reamintim: dacă $f' < 0$ pe un interval, f este strict descrescătoare pe el; dacă $f' > 0$, f este strict crescătoare.

Numitorul $\ln^2 x$ este pozitiv pe $(1, +\infty)$, deci semnul lui f' este semnul lui $\ln x - 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Pentru $x \in (1, e)$, $\ln x < 1$, deci $f'(x) < 0$ și f este strict descrescătoare pe $(1, e]$.

Pentru $x \in (e, +\infty)$, $\ln x > 1$, deci $f'(x) > 0$ și f este strict crescătoare pe $[e, +\infty)$.

Rezultă că $x = e$ este punct de minim global: $f(x) \geq f(e)$, pentru orice $x > 1$.

$$\text{Calculăm } f(e) = \frac{e}{\ln e} = e, \text{ deci } \frac{x}{\ln x} \geq e, \text{ pentru orice } x > 1.$$

Cum $\ln x > 0$ pentru $x > 1$, înmulțim cu $\ln x$ fără a schimba sensul inegalității.

Am arătat că $x \geq e \ln x$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

$$\mathbf{R: a)} f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}; \mathbf{b)} } x = 1; \mathbf{c)} } f(x) \geq f(e) = e$$

III.2

a) Explicităm modulul, după semnul lui $x - 1$:

$$f(x) = 1 - x, \text{ pentru } x \leq 1, \text{ și } f(x) = x - 1, \text{ pentru } x > 1.$$

Împărțim intervalul de integrare în punctul 1 (aditivitatea integralei față de interval):

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^2 (x - 1) dx$$

Aplicăm formula Leibniz–Newton, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$:

$$\begin{aligned} &= \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left((2 - 2) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Deci } \int_0^2 f(x) dx = 1.$$

b) Folosim aceeași explicitare: $xf(x) = x - x^2$ pe $[0, 1]$ și $xf(x) = x^2 - x$ pe $[1, 3]$.

$$\int_0^3 xf(x) dx = \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^3 (x^2 - x) dx$$

Calculăm prima integrală:

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Calculăm a doua integrală:

$$\int_1^3 (x^2 - x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^3 = \left(9 - \frac{9}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{1}{6} = \frac{14}{3}$$

Adunăm rezultatele:

$$\int_0^3 x f(x) dx = \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = \frac{1}{6} + \frac{28}{6} = \frac{29}{6}$$

Deci integrala este egală cu $\frac{29}{6}$.

c) Ideea: calculăm integrala în funcție de a și rezolvăm ecuația obținută.

Pentru $a \geq 1$, împărțim intervalul în punctul 1:

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^a (x-1) dx$$

Prima integrală este $\frac{1}{2}$, din a). Pentru a doua, o primitivă a lui $x-1$ este $\frac{(x-1)^2}{2}$:

$$\int_1^a (x-1) dx = \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_1^a = \frac{(a-1)^2}{2}$$

$$\text{Deci } \int_0^a f(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{(a-1)^2}{2}.$$

Rezolvăm ecuația:

$$\frac{1}{2} + \frac{(a-1)^2}{2} = \frac{5}{2}$$

$(a-1)^2 = 4$, deci $a-1 = 2$ sau $a-1 = -2$.

Varianta $a-1 = -2$, adică $a = -1$, nu convine, deoarece nu verifică condiția $a \geq 1$.

Numărul căutat este $a = 3$.

R: a) 1; b) $\frac{29}{6}$; c) $a = 3$

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică $M_mate-info$

Simularea 100

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I**(30 de puncte)**

5p	1. Determinați numărul complex z pentru care $z + 2\bar{z} = -3 - 2i$.
5p	2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 1$. Determinați numărul real x pentru care $(f \circ g)(x) = -7$.
5p	3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x - 4) + \log_2(x + 3) = 3$.
5p	4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele egale.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ și $C(1, 3)$. Determinați aria triunghiului ABC și lungimea înălțimii din C a triunghiului ABC .
5p	6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 7$, $AC = 8$ și $BC = 13$. Determinați măsura unghiului A .

SUBIECTUL al II-lea**(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2m+1 & 2 & m \\ 1 & 1 & -m-1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații
	$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ (2m+1)x + 2y + mz = -1, \text{ unde } m \text{ este număr real.} \\ x + y - (m+1)z = 1 \end{cases}$
5p	a) Arătați că $\det(A(0)) = -6$.
5p	b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.
5p	c) Determinați numerele întregi m pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) , cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.
	2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + mX - 1$, unde m este număr real.
5p	a) Arătați că $f(1) = m - 3$, pentru orice număr real m .
5p	b) Pentru $m = 3$, arătați că $f = (X - 1)^3$.
5p	c) Determinați numărul real m pentru care polinomul f are o rădăcină reală al cărei ordin de multiplicitate este exact 2.

SUBIECTUL al III-lea**(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$.
5p	a) Arătați că $f'(x) = x - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .

5p	c) Demonstrați că $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, pentru orice număr real x .
	2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$.
5p	a) Calculați $\int_1^2 x(x^2 + 1)f(x) dx$.
5p	b) Arătați că $\int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$.
5p	c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt$.

Simularea 100 · Rezolvări și barem

octavianghetu.ro

Simulare pentru examenul național de bacalaureat

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simularea 100

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z + 2\bar{z} = 3a - bi$, unde $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ $3a = -3$ și $-b = -2$, deci $z = -1 + 2i$	3p 2p
2.	$(f \circ g)(x) = -2(2x + 1) + 3 = -4x + 1$ $-4x + 1 = -7$, deci $x = 2$	3p 2p
3.	$(x - 4)(x + 3) = 8 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0$ $x = 5$, care convine, iar $x = -4$ nu verifică condiția $x > 4$	3p 2p
4.	900 de cazuri posibile 9 cazuri favorabile (numerele 111, 222, ..., 999), deci $p = \frac{9}{900} = \frac{1}{100}$	2p 3p
5.	$AB = 4$ și $h_C = d(C, Ox) = 3$ $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$	2p 3p
6.	$\cos A = \frac{49 + 64 - 169}{112} = -\frac{1}{2}$ $m(\angle A) = 120^\circ$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 3 - 6 - 0 + 1$ $\det(A(0)) = -6$	3p 2p
b)	$\det(A(m)) = 2(m - 1)(m + 3)$ sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det(A(m)) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$	2p 3p
c)	$x_0 = \frac{-5}{(m - 1)(m + 3)}$, $y_0 = \frac{3m + 4}{(m - 1)(m + 3)}$, $z_0 = \frac{2 - m}{(m - 1)(m + 3)}$ $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (m + 1)^2 - 4 \in \{-5, -1, 1, 5\} \Rightarrow m \in \{-4, 2\}$ pentru $m = -4$, $y_0 \notin \mathbb{Z}$, iar pentru $m = 2$, soluția este $(-1, 2, 0)$, deci $m = 2$	2p 2p 1p
2.a)	$f(1) = 1 - 3 + m - 1$ $f(1) = m - 3$	3p 2p

b)	$(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$	3p
	pentru $m = 3$, $f = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3$	2p
c)	$x_1 = x_2 = a$, $x_3 = b$ și relațiile lui Viète $2a + b = 3$, $a^2b = 1$, deci $2a^3 - 3a^2 + 1 = 0$	2p
	$(a-1)^2(2a+1) = 0$, iar $a = 1$ dă rădăcina triplă 1, deci nu convine	2p
	$a = -\frac{1}{2}$, $b = 4$, deci $m = a^2 + 2ab = -\frac{15}{4}$	1p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$(\cos x)' = -\sin x$ și $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$	3p
	$f'(x) = x - \sin x$	2p
b)	$f''(x) = 1 - \cos x \geq 0$, deci f' este crescătoare, și $f'(0) = 0$	2p
	$f'(x) \leq 0$ pe $(-\infty, 0]$ și $f'(x) \geq 0$ pe $[0, +\infty)$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, +\infty)$	3p
c)	$x = 0$ este punct de minim, deci $f(x) \geq f(0)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	2p
	$f(0) = 1$, deci $\cos x + \frac{x^2}{2} \geq 1$, adică $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$	3p
2.a)	$x(x^2 + 1)f(x) = 1$, deci integrala este $\int_1^2 1 dx$	3p
	$x \Big _1^2 = 1$	2p
b)	$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$	2p
	$\int_1^2 f(x) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$	3p
c)	$\int_1^x f(t) dt = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{2} \ln 2$	2p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1$, deci limita este $\frac{1}{2} \ln 2$	3p

Rezolvări explicate

SUBIECTUL I

- I.1** Scriem numărul complex în formă algebrică: $z = a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.
 Reamintim: conjugatul lui $z = a + bi$ este $\bar{z} = a - bi$.
 Calculăm membrul stâng:
 $z + 2\bar{z} = a + bi + 2(a - bi) = a + bi + 2a - 2bi = 3a - bi$
 Ecuația devine:
 $3a - bi = -3 - 2i$
 Reamintim: două numere complexe sunt egale dacă au părțile reale egale și părțile imaginare egale.
 Obținem $3a = -3$ și $-b = -2$, deci $a = -1$ și $b = 2$.
 Verificăm: $-1 + 2i + 2(-1 - 2i) = -1 + 2i - 2 - 4i = -3 - 2i$.
 Numărul căutat este $z = -1 + 2i$.
R: $z = -1 + 2i$
- I.2** Reamintim definiția compunerii: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 Înlocuim în expresia lui f pe x cu $g(x)$:
 $(f \circ g)(x) = -2g(x) + 3 = -2(2x + 1) + 3$
 Desfacem paranteza:
 $(f \circ g)(x) = -4x - 2 + 3 = -4x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$
 Ecuația devine:
 $-4x + 1 = -7$
 $-4x = -8$, deci $x = 2$.
 Verificăm: $g(2) = 5$ și $f(5) = -10 + 3 = -7$.
 Numărul căutat este $x = 2$.
R: $x = 2$
- I.3** Punem condițiile de existență a logaritmulor: $x - 4 > 0$ și $x + 3 > 0$.
 Din $x > 4$ și $x > -3$ rezultă condiția $x > 4$.
 Reamintim proprietatea $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab)$, pentru $a, b > 0$.
 Ecuația devine:
 $\log_2((x - 4)(x + 3)) = 3$
 Din definiția logaritmului, $\log_2 u = 3 \Leftrightarrow u = 2^3$, deci:
 $(x - 4)(x + 3) = 8$
 Desfacem parantezele:
 $x^2 - x - 12 = 8 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0$
 Calculăm discriminantul: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 1 + 80 = 81$.
 Rădăcinile sunt $x_1 = \frac{1 - 9}{2} = -4$ și $x_2 = \frac{1 + 9}{2} = 5$.
 $x_1 = -4$ nu verifică condiția $x > 4$, deci nu convine.
 $x_2 = 5$ verifică condiția; verificăm și în ecuație: $\log_2 1 + \log_2 8 = 0 + 3 = 3$.
 Soluția ecuației este $x = 5$.
R: $x = 5$

I.4

Reamintim: probabilitatea unui eveniment este $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$.

Numărăm cazurile posibile. Numerele naturale de trei cifre sunt 100, 101, ..., 999:

$999 - 100 + 1 = 900$ de numere, deci sunt 900 de cazuri posibile.

Numărăm cazurile favorabile. Un număr de trei cifre cu toate cifrele egale este de forma $\overline{aaa}$, cu $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ (prima cifră nu poate fi 0).

Acestea sunt 111, 222, ..., 999, adică 9 numere, deci sunt 9 cazuri favorabile.

Calculăm probabilitatea:

$$p = \frac{9}{900} = \frac{1}{100}$$

Probabilitatea cerută este $p = \frac{1}{100}$.

$$\mathbf{R: } p = \frac{1}{100}$$

I.5

Observăm că punctele A și B au ordonata 0, deci dreapta AB este axa Ox .

Reamintim formula distanței dintre două puncte: $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$.

Calculăm lungimea bazei:

$$AB = \sqrt{(4 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Înălțimea din C este distanța de la C la dreapta AB , adică la axa Ox .

Distanța de la un punct la axa Ox este modulul ordonatei lui, deci $h_C = |y_C| = 3$.

Reamintim formula ariei unui triunghi: $\mathcal{A} = \frac{\text{baza} \cdot \text{înălțimea}}{2}$.

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot h_C}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

Aria triunghiului ABC este 6, iar înălțimea din C are lungimea 3.

$$\mathbf{R: } \mathcal{A}_{ABC} = 6, h_C = 3$$

I.6

Cunoaștem toate laturile triunghiului, iar unghiul A este opus laturii BC , deci aplicăm teorema cosinusului.

Reamintim teorema cosinusului: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$.

Exprimăm $\cos A$:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

Înlocuim lungimile laturilor:

$$\cos A = \frac{49 + 64 - 169}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{-56}{112} = -\frac{1}{2}$$

Unghiul unui triunghi are măsura în intervalul $(0^\circ, 180^\circ)$, iar pe acest interval singurul unghi cu cosinusul $-\frac{1}{2}$ este 120° .

Deci $m(\angle A) = 120^\circ$.

$$\mathbf{R: } m(\angle A) = 120^\circ$$

SUBIECTUL al II-lea

II.1 a) Pentru $m = 0$ obținem:

$$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Reamintim regula lui Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Aplicăm regula:

$$\begin{aligned} \det(A(0)) &= 2 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) \\ &= -4 + 0 + 3 - 6 - 0 + 1 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Am arătat că $\det(A(0)) = -6$.

b) Reamintim: un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute este compatibil determinat dacă și numai dacă determinantul matricei sistemului este nenul.

Pentru $\det(A(m)) \neq 0$, sistemul este de tip Cramer; pentru $\det(A(m)) = 0$, rangul matricei sistemului este mai mic decât 3, deci sistemul nu poate avea soluție unică.

Matricea sistemului este $A(m)$. Calculăm determinantul ei cu regula lui Sarrus:

$$\begin{aligned} \det(A(m)) &= 2 \cdot 2 \cdot (-m-1) + 1 \cdot m \cdot 1 + 3(2m+1) \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot m \cdot 1 - 1 \cdot (2m+1)(-m-1) \\ &= -4m - 4 + m + 6m + 3 - 6 - 2m + (2m^2 + 3m + 1) \\ &= 2m^2 + 4m - 6 \end{aligned}$$

Dăm factor comun 2 și descompunem trinomul $m^2 + 2m - 3$, care are rădăcinile 1 și -3:

$$\det(A(m)) = 2(m-1)(m+3)$$

Rezolvăm $\det(A(m)) = 0$: $(m-1)(m+3) = 0 \Leftrightarrow m \in \{-3, 1\}$.

Sistemul este compatibil determinat pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$.

c) Ideea: scriem soluția cu regula lui Cramer și punem condiția ca x_0 să fie întreg; aceasta lasă doar două valori ale lui m , pe care le verificăm.

Din b), sistemul are soluție unică doar pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$, când

$$\Delta = \det(A(m)) = 2(m-1)(m+3) \neq 0.$$

Reamintim regula lui Cramer: $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}$, unde Δ_x , Δ_y , Δ_z se obțin înlocuind coloana necunoscutei cu coloana termenilor liberi.

Calculăm determinanțele cu regula lui Sarrus:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & m \\ 1 & 1 & -m-1 \end{vmatrix} = 0 + m - 3 - 6 - 0 - (m+1) = -10$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2m+1 & -1 & m \\ 1 & 1 & -m-1 \end{vmatrix} = (2m+2) + 0 + (6m+3) + 3 - 2m - 0 = 6m+8$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2m+1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 1 + 0 - 0 + 2 - (2m+1) = 4 - 2m$$

Simplificăm prin 2 și obținem:

$$x_0 = \frac{-5}{(m-1)(m+3)}, y_0 = \frac{3m+4}{(m-1)(m+3)}, z_0 = \frac{2-m}{(m-1)(m+3)}$$

Pentru m întreg, $(m-1)(m+3)$ este număr întreg nenul, iar $x_0 \in \mathbb{Z}$ impune ca $(m-1)(m+3)$ să fie divizor al lui 5:

$$(m-1)(m+3) \in \{-5, -1, 1, 5\}$$

Observăm că $(m-1)(m+3) = m^2 + 2m - 3 = (m+1)^2 - 4$, deci $(m+1)^2 \in \{-1, 3, 5, 9\}$.

Singurul pătrat perfect din această mulțime este 9, deci $m+1 = \pm 3$, adică $m = 2$ sau $m = -4$.

Pentru $m = -4$: $(m-1)(m+3) = 5$ și $y_0 = \frac{-12+4}{5} = -\frac{8}{5} \notin \mathbb{Z}$, deci $m = -4$ nu convine.

Pentru $m = 2$: $(m-1)(m+3) = 5$, $x_0 = -1$, $y_0 = \frac{10}{5} = 2$, $z_0 = \frac{0}{5} = 0$, toate numere întregi.

Verificăm în sistemul pentru $m = 2$: $2 \cdot (-1) + 2 + 0 = 0$, $5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = -1$,
 $-1 + 2 - 3 \cdot 0 = 1$.

Singurul număr întreg căutat este $m = 2$.

R: a) $\det(A(0)) = -6$; **b)** $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$; **c)** $m = 2$, cu soluția $(-1, 2, 0)$

II.2 a) Înlocuim X cu 1 în expresia polinomului:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1^2 + m \cdot 1 - 1 \\ &= 1 - 3 + m - 1 \\ &= m - 3 \end{aligned}$$

Am arătat că $f(1) = m - 3$, pentru orice număr real m .

b) Pentru $m = 3$ obținem $f = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.

Reamintim formula cubului unei diferențe: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Aplicăm formula pentru $a = X$ și $b = 1$:

$$(X - 1)^3 = X^3 - 3X^2 \cdot 1 + 3X \cdot 1^2 - 1^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$$

Cele două polinoame au aceiași coeficienți.

Deci, pentru $m = 3$, $f = (X - 1)^3$.

c) Ideea: notăm rădăcina dublă cu a și a treia rădăcină cu b , scriem relațiile lui Viète și obținem o ecuație în a .

Fie a rădăcina reală de ordin de multiplicitate exact 2. Atunci rădăcinile lui f sunt $x_1 = x_2 = a$ și $x_3 = b$, cu $b \neq a$.

Reamintim relațiile lui Viète pentru polinomul $X^3 + pX^2 + qX + r$: $x_1 + x_2 + x_3 = -p$,

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q, \quad x_1x_2x_3 = -r.$$

Pentru $f = X^3 - 3X^2 + mX - 1$ obținem:

$$2a + b = 3, \quad a^2 + 2ab = m, \quad a^2b = 1$$

Din prima relație, $b = 3 - 2a$, număr real. Înlocuim în a treia:

$$a^2(3 - 2a) = 1 \Leftrightarrow 2a^3 - 3a^2 + 1 = 0$$

Observăm că $a = 1$ este rădăcină: $2 - 3 + 1 = 0$.

Împărțim la $a - 1$ și descompunem în continuare:

$$2a^3 - 3a^2 + 1 = (a - 1)(2a^2 - a - 1) = (a - 1)^2(2a + 1)$$

Deci $a = 1$ sau $a = -\frac{1}{2}$.

Pentru $a = 1$ obținem $b = 3 - 2 = 1 = a$, adică rădăcina 1 ar fi triplă (cazul $m = 3$ de la b)), deci nu convine.

Pentru $a = -\frac{1}{2}$ obținem $b = 3 + 1 = 4 \neq a$.

Calculăm m :

$$m = a^2 + 2ab = \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 = \frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4}$$

Verificăm: $\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 (X - 4) = \left(X^2 + X + \frac{1}{4}\right)(X - 4) = X^3 - 3X^2 - \frac{15}{4}X - 1$, adică exact f pentru $m = -\frac{15}{4}$.

Numărul căutat este $m = -\frac{15}{4}$.

R: a) $f(1) = m - 3$; **b)** $(X - 1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = f$; **c)** $m = -\frac{15}{4}$

SUBIECTUL al III-lea

III.1

a) Reamintim derivatele folosite: $(\cos x)' = -\sin x$, $(x^2)' = 2x$ și $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.

Derivăm termen cu termen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x + \frac{1}{2} \cdot 2x \\ &= -\sin x + x = x - \sin x \end{aligned}$$

Am arătat că $f'(x) = x - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Reamintim: dacă $f' \leq 0$ pe un interval, f este descrescătoare pe acel interval, iar dacă $f' \geq 0$, f este crescătoare.

Semnul lui f' nu se citește direct, deci studiem monotonia lui f' cu ajutorul derivatei a doua.

$$f''(x) = (x - \sin x)' = 1 - \cos x, x \in \mathbb{R}$$

Cum $\cos x \leq 1$, avem $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci funcția f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

$$\text{Calculăm } f'(0) = 0 - \sin 0 = 0.$$

Pentru $x \leq 0$, din monotonia lui f' , $f'(x) \leq f'(0) = 0$.

Pentru $x \geq 0$, din monotonia lui f' , $f'(x) \geq f'(0) = 0$.

(Pentru $x > 0$ avem chiar $f'(x) = x - \sin x > 0$, deoarece $\sin x < x$ pentru $x > 0$; cum f' este funcție impară, $f'(x) < 0$ pentru $x < 0$.)

Deci funcția f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, +\infty)$.

c) Ideea: inegalitatea este echivalentă cu $f(x) \geq 1 = f(0)$, deci arătăm că $x = 0$ este punct de minim global al lui f .

Din b), f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, +\infty)$.

Deci $x = 0$ este punct de minim global al funcției f , adică $f(x) \geq f(0)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Calculăm valoarea minimă:

$$f(0) = \cos 0 + \frac{0^2}{2} = 1$$

Obținem $\cos x + \frac{x^2}{2} \geq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Scădem $\frac{x^2}{2}$ din ambii membri.

Am demonstrat că $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, pentru orice număr real x .

R: a) $f'(x) = x - \sin x$; **b)** f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, +\infty)$; **c)** minimul lui f este $f(0) = 1$

III.2 a) Simplificăm integrandul: pentru orice $x \in (0, +\infty)$,

$$x(x^2 + 1)f(x) = x(x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x(x^2 + 1)} = 1$$

Aplicăm formula Leibniz–Newton, $\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$, unde G este o primitivă a lui g :

$$\int_1^2 x(x^2 + 1)f(x) dx = \int_1^2 1 dx = x \Big|_1^2 = 2 - 1 = 1$$

Integrala este egală cu 1.

b) Ideea: descompunem fracția în fracții simple, ca să obținem integrale cunoscute.

$$\text{Căutăm } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ cu } \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}.$$

Aducem la același numitor și egalăm numărătorii:

$$1 = a(x^2 + 1) + (bx + c)x = (a + b)x^2 + cx + a$$

Identificăm coeficienții: $a = 1$, $c = 0$, $a + b = 0$, deci $b = -1$.

$$\text{Deci } f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}, x \in (0, +\infty).$$

Calculăm prima integrală:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Pentru a doua integrală observăm că $(x^2 + 1)' = 2x$ și folosim primitiva $\int \frac{u'}{u} dx = \ln u + C$, pentru $u > 0$:

$$\int_1^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$$

Scădem cele două rezultate:

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 \\ &= \frac{1}{2} (3 \ln 2 - \ln 5) = \frac{1}{2} (\ln 8 - \ln 5) = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Am arătat că } \int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}.$$

c) Ideea: calculăm integrala cu limita superioară variabilă folosind primitiva de la b), apoi trecem la limită.

Din b), o primitivă a funcției f pe $(0, +\infty)$ este $F(t) = \ln t - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1)$.

Pentru $x > 1$, aplicăm formula Leibniz–Newton:

$$\int_1^x f(t) dt = F(x) - F(1) = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln 2$$

Termenii $\ln x$ și $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ tind amândoi la $+\infty$ (nedeterminare $\infty - \infty$), deci îi grupăm într-un singur logaritm:

$$\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) = \ln x - \ln \sqrt{x^2 + 1} = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Calculăm limita argumentului, scoțând x factor comun sub radical:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$$

Funcția logaritm este continuă, deci $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln 1 = 0$.

$$\text{Obținem } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = 0 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Limita este egală cu $\frac{1}{2} \ln 2$.

$$\mathbf{R: a) 1; b) } \int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}; \mathbf{c) } \frac{1}{2} \ln 2$$

AI VĂZUT 3 DIN 105

Vrei toate simulările, cu rezolvări și barem?

În carte primești:

- **105 simulări**, de la primii pași până la nivelul examenului;
- după fiecare, **barem**ul și **rezolvarea explicată** a fiecărui exercițiu;
- PDF cu numele tău, îl păstrezi pentru totdeauna.

Cumpără cartea