PROBĂ GRATUITĂ

105 Simulări pentru Bacalaureat la Matematică

Profil Ştiinţe ale naturii · Octavian Gheţu

3 simulări din culegere, câte una de pe fiecare nivel de dificultate.

După fiecare simulare găseşti **baremul** (ca la minister) şi **rezolvarea explicată pas cu pas** a fiecărui exerciţiu — exact ca în culegere.

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Simularea 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numărul $z=(2-3i)^2+12i$ este număr real.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx-4$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $f(-1)=-2$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x+4}=\sqrt{x+3}$.
5p	**4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,48\}$, acesta să fie divizibil cu 8.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(-1,4)$ și $C(2,3)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în A.
5p	**6.** Știind că $\cos x=-\dfrac{15}{17}$ și $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, calculați $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1-2x & 4x\\ -2x & 1+4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\big(A(3)\big)=7$.
5p	**b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+2xy)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=A(12)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{(x+3)(y+3)}{5}-3$.
5p	**a)** Calculați $7\circ 3$.
5p	**b)** Arătați că $e=2$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
5p	**c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m\circ n=12$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+16}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(2-x)(x+8)}{(x^2+16)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.
5p	**c)** Arătați că $\lvert f(x)-f(y)\rvert\leq\dfrac{5}{16}$, pentru orice numere reale x și y.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2x-2)e^x$.
5p	**a)** Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(2x-4)e^x$, este o primitivă a funcției f.

5p	**b)** Determinați primitiva G a funcției f pentru care $G(0)=-3$.
5p	**c)** Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $[0,+\infty)$.

Simularea 1 · Rezolvări și barem

octavianghetu.ro

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simularea 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2-3i)^2=4-12i+9i^2=-5-12i$	**3p**
	$z=-5-12i+12i=-5$, care este număr real	**2p**
2.	$f(-1)=-m-4$, deci $-m-4=-2$	**3p**
	$m=-2$	**2p**
3.	$2x+4=x+3$	**3p**
	$x=-1$, care verifică ecuația	**2p**
4.	48 de cazuri posibile	**2p**
	6 cazuri favorabile ($n\in\{8,16,24,32,40,48\}$), deci $p=\dfrac{6}{48}=\dfrac{1}{8}$	**3p**
5.	$AB=AC=\sqrt{5}$ și $BC=\sqrt{10}$	**3p**
	$AB^2+AC^2=BC^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în A	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\dfrac{225}{289}=\dfrac{64}{289}$	**3p**
	$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow \sin x>0$, deci $\sin x=\dfrac{8}{17}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(3)=\begin{pmatrix}-5 & 12\\ -6 & 13\end{pmatrix}$ și $\det\big(A(3)\big)=(-5)\cdot 13-12\cdot(-6)$	**3p**
	$\det\big(A(3)\big)=-65+72=7$	**2p**
b)	elementele produsului $A(x)\cdot A(y)$ sunt $1-2x-2y-4xy$, $4x+4y+8xy$, $-2x-2y-4xy$, $1+4x+4y+8xy$	**3p**
	cu $t=x+y+2xy$ ele sunt $1-2t$, $4t$, $-2t$, $1+4t$, deci $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+2xy)$	**2p**
c)	$A(x)\cdot A(x)=A(2x^2+2x)$, deci $2x^2+2x=12$	**2p**
	$x^2+x-6=0$, deci $x=-3$ sau $x=2$	**3p**
2.a)	$7\circ 3=\dfrac{10\cdot 6}{5}-3$	**3p**
	$7\circ 3=12-3=9$	**2p**

b)	$x \circ 2 = \dfrac{5(x+3)}{5} - 3 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$2 \circ x = x \circ 2 = x$ (legea este comutativă), deci $e = 2$ este elementul neutru	**2p**
c)	$m \circ n = 12 \Leftrightarrow (m+3)(n+3) = 75$	**2p**
	$m+3 \geq 3$ și $n+3 \geq 3$ sunt divizori ai lui 75, deci $(m,n) \in \{(0,22),(2,12),(12,2),(22,0)\}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2+16) - (x+3) \cdot 2x}{(x^2+16)^2}$	**3p**
	$f'(x) = \dfrac{-x^2-6x+16}{(x^2+16)^2} = \dfrac{(2-x)(x+8)}{(x^2+16)^2}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$	**3p**
	$f'(0) = \dfrac{16}{256} = \dfrac{1}{16}$	**2p**
c)	f este strict descrescătoare pe $(-\infty,-8]$, strict crescătoare pe $[-8,2]$, strict descrescătoare pe $[2,+\infty)$, cu $f(-8) = -\dfrac{1}{16}$ și $f(2) = \dfrac{1}{4}$	**2p**
	$-\dfrac{1}{16} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{4}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $\lvert f(x) - f(y) \rvert \leq \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{5}{16}$	**3p**
2.a)	$F'(x) = 2e^x + (2x-4)e^x$	**3p**
	$F'(x) = (2x-2)e^x = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci F este o primitivă a lui f	**2p**
b)	$G(x) = (2x-4)e^x + c$, $c \in \mathbb{R}$, și $G(0) = -4 + c$	**3p**
	$c = 1$, deci $G(x) = (2x-4)e^x + 1$	**2p**
c)	$H''(x) = f'(x) = 2xe^x$, pentru orice primitivă H a lui f	**2p**
	$H''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0,+\infty)$, deci H este convexă pe $[0,+\infty)$	**3p**

Rezolvări explicate

SUBIECTUL I

I.1 Reamintim formula pătratului unei diferențe, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, și faptul că $i^2 = -1$.
Calculăm pătratul:
$(2-3i)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2$
$= 4 - 12i + 9i^2$
$= 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$
Adunăm $12i$:
$z = -5 - 12i + 12i = -5$
Reamintim: numărul complex $z = a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, este real dacă partea lui imaginară este $b = 0$.
Numărul $z = -5$ are partea imaginară egală cu 0.
Am arătat că numărul z este număr real.
R: $z = -5 \in \mathbb{R}$

I.2 Înlocuim $x = -1$ în expresia funcției:
$f(-1) = m \cdot (-1) - 4 = -m - 4$
Condiția $f(-1) = -2$ devine ecuația:
$-m - 4 = -2$
Trecem -4 în membrul drept, cu semn schimbat:
$-m = -2 + 4$
$-m = 2$
Înmulțim ambii membri cu -1 și obținem $m = -2$.
Verificăm: pentru $m = -2$, $f(x) = -2x - 4$ și $f(-1) = 2 - 4 = -2$.
Numărul căutat este $m = -2$.
R: $m = -2$

I.3 Punem condițiile de existență ale radicalilor: expresiile de sub radical trebuie să fie nenegative.
$2x + 4 \geq 0$, adică $x \geq -2$, și $x + 3 \geq 0$, adică $x \geq -3$.
Ambele condiții sunt îndeplinite pentru $x \in [-2, +\infty)$.
Cei doi membri ai ecuației sunt numere nenegative, deci putem ridica ecuația la pătrat:
$2x + 4 = x + 3$
Trecem termenii cu x în membrul stâng și numerele în membrul drept:
$2x - x = 3 - 4$
$x = -1$
Valoarea $x = -1$ verifică condiția $x \geq -2$.
Verificăm în ecuație: $\sqrt{2 \cdot (-1) + 4} = \sqrt{2}$ și $\sqrt{-1 + 3} = \sqrt{2}$.
Soluția ecuației este $x = -1$.
R: $x = -1$

I.4 Reamintim: când toate cazurile sunt egal posibile, probabilitatea unui eveniment este $p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$.

Mulțimea A are 48 de elemente, deci sunt 48 de cazuri posibile.

Căutăm numerele din A divizibile cu 8, adică multiplii lui 8 care sunt cel mult egali cu 48:

$8 \cdot 1 = 8$, $8 \cdot 2 = 16$, $8 \cdot 3 = 24$, $8 \cdot 4 = 32$, $8 \cdot 5 = 40$, $8 \cdot 6 = 48$

Următorul multiplu, $8 \cdot 7 = 56$, este mai mare decât 48, deci nu aparține mulțimii A.

Sunt 6 cazuri favorabile: $n \in \{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$.

Calculăm probabilitatea:

$$p = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$$

Probabilitatea cerută este $p = \dfrac{1}{8}$.

R: $p = \dfrac{1}{8}$

I.5 Ca să arătăm că unghiul din A este drept, calculăm lungimile laturilor și aplicăm reciproca teoremei lui Pitagora.

Reamintim formula distanței dintre punctele $M(x_1, y_1)$ și $N(x_2, y_2)$:

$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$AB = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

$BC = \sqrt{\big(2 - (-1)\big)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

Calculăm $AB^2 + AC^2 = 5 + 5 = 10$ și $BC^2 = 10$, deci $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Reamintim reciproca teoremei lui Pitagora: dacă într-un triunghi pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi, atunci unghiul opus acelei laturi este drept.

Latura BC se opune vârfului A, deci $\measuredangle BAC = 90^\circ$.

Am arătat că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

R: $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 10$**, deci** $\measuredangle BAC = 90^\circ$

I.6 Reamintim formula fundamentală a trigonometriei: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, pentru orice număr real x.

Exprimăm $\sin^2 x$ și înlocuim $\cos x = -\dfrac{15}{17}$:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(-\frac{15}{17}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{225}{289}$$

$$= \frac{289 - 225}{289} = \frac{64}{289}$$

Deci $\sin x = \dfrac{8}{17}$ sau $\sin x = -\dfrac{8}{17}$.

Pentru $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ (cadranul al II-lea), sinusul este pozitiv, deci valoarea $-\dfrac{8}{17}$ nu convine.

Obținem $\sin x = \dfrac{8}{17}$.

R: $\sin x = \dfrac{8}{17}$

SUBIECTUL al II-lea

II.1 **a)** Înlocuim $x=3$ în matricea $A(x)$:

$A(3)=\begin{pmatrix}1-6 & 12\\ -6 & 1+12\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-5 & 12\\ -6 & 13\end{pmatrix}$

Reamintim formula determinantului de ordinul 2: $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$.

Calculăm:

$\det\big(A(3)\big)=(-5)\cdot 13-12\cdot(-6)$

$=-65+72$

$=7$

Am arătat că $\det\big(A(3)\big)=7$.

b) Reamintim regula de înmulțire a matricelor: elementul de pe linia i și coloana j al produsului se obține înmulțind, termen cu termen, linia i a primei matrice cu coloana j a celei de-a doua și adunând rezultatele.

Fie $x,y\in\mathbb{R}$. Înmulțim matricele

$A(x)=\begin{pmatrix}1-2x & 4x\\ -2x & 1+4x\end{pmatrix}$ și $A(y)=\begin{pmatrix}1-2y & 4y\\ -2y & 1+4y\end{pmatrix}$.

Linia 1, coloana 1:

$(1-2x)(1-2y)+4x\cdot(-2y)$

$=1-2x-2y+4xy-8xy=1-2x-2y-4xy$

Linia 1, coloana 2:

$(1-2x)\cdot 4y+4x(1+4y)$

$=4y-8xy+4x+16xy=4x+4y+8xy$

Linia 2, coloana 1:

$-2x(1-2y)+(1+4x)\cdot(-2y)$

$=-2x+4xy-2y-8xy=-2x-2y-4xy$

Linia 2, coloana 2:

$-2x\cdot 4y+(1+4x)(1+4y)$

$=-8xy+1+4x+4y+16xy=1+4x+4y+8xy$

Notăm $t=x+y+2xy$. Elementele obținute se scriu cu ajutorul lui t:

$1-2x-2y-4xy=1-2t$ și $4x+4y+8xy=4t$

$-2x-2y-4xy=-2t$ și $1+4x+4y+8xy=1+4t$

Deci $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1-2t & 4t\\ -2t & 1+4t\end{pmatrix}=A(t)$.

Am arătat că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+2xy)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Ideea: folosim relația de la b) pentru $y=x$ și apoi egalăm elementele corespunzătoare ale celor două matrice.

Din b), pentru $y=x$, obținem:

$A(x)\cdot A(x)=A(x+x+2x\cdot x)=A(2x^2+2x)$

Ecuația devine $A(2x^2+2x)=A(12)$.

Reamintim: două matrice sunt egale dacă au elementele corespunzătoare egale.

Egalăm elementele de pe linia 1, coloana 2: $4(2x^2+2x)=4\cdot 12$, adică $2x^2+2x=12$.

Pentru această egalitate coincid și celelalte elemente, deoarece toate depind doar de $2x^2+2x$.

Împărțim ecuația la 2:

$x^2+x-6=0$

Calculăm discriminantul: $\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-6)=1+24=25$.

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2}$, deci $x_1=2$ și $x_2=-3$.

Verificăm: pentru $x=2$, $2\cdot 4+2\cdot 2=12$; pentru $x=-3$, $2\cdot 9+2\cdot(-3)=12$.

Numerele reale căutate sunt $x=-3$ și $x=2$.

R: a) $\det\big(A(3)\big)=7$; **b)** $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+2xy)$; **c)** $x\in\{-3,2\}$

II.2 **a)** Aplicăm definiția legii pentru $x=7$ și $y=3$:

$7\circ 3=\dfrac{(7+3)(3+3)}{5}-3$

$=\dfrac{10\cdot 6}{5}-3$

$=\dfrac{60}{5}-3$

$=12-3$

$=9$

Deci $7\circ 3=9$.

b) Reamintim: $e\in\mathbb{R}$ este elementul neutru al legii „$\circ$” dacă $x\circ e=e\circ x=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Observăm întâi că legea este comutativă, deoarece înmulțirea numerelor reale este comutativă:

$x\circ y=\dfrac{(x+3)(y+3)}{5}-3=\dfrac{(y+3)(x+3)}{5}-3=y\circ x$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

Fie $x\in\mathbb{R}$. Calculăm $x\circ 2$:

$x\circ 2=\dfrac{(x+3)(2+3)}{5}-3$

$=\dfrac{5(x+3)}{5}-3$

$=x+3-3$

$=x$

Din comutativitate, $2\circ x=x\circ 2=x$.

Deci $x\circ 2=2\circ x=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, iar $2\in\mathbb{R}$.

Am arătat că $e=2$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

c) Ideea: scriem ecuația ca produs a doi factori naturali egal cu un număr și folosim divizorii acelui număr.

Scriem ecuația $m\circ n=12$ cu ajutorul definiției legii:

$\dfrac{(m+3)(n+3)}{5}-3=12$

$\dfrac{(m+3)(n+3)}{5}=15$

$(m+3)(n+3)=75$

Cum $m,n\in\mathbb{N}$, numerele $m+3$ și $n+3$ sunt naturale și cel puțin egale cu 3.

Deci $m+3$ și $n+3$ sunt divizori ai lui $75=3\cdot 5^2$, cu produsul 75.

Divizorii naturali ai lui 75 sunt 1, 3, 5, 15, 25, 75.

Divizorul 1 nu convine (este mai mic decât 3); atunci nu convine nici 75, deoarece celălalt factor ar fi 1.

Rămân variantele:

$(m+3,n+3)\in\{(3,25),(5,15),(15,5),(25,3)\}$

Scădem 3 din fiecare număr:

$(m,n)\in\{(0,22),(2,12),(12,2),(22,0)\}$

Verificăm o pereche: $2\circ 12=\dfrac{5\cdot 15}{5}-3=15-3=12$.

Perechile căutate sunt $(0,22)$, $(2,12)$, $(12,2)$ și $(22,0)$.

R: a) $7\circ 3=9$**; b)** $x\circ 2=2\circ x=x$**, pentru orice** $x\in\mathbb{R}$**; c)** $(m,n)\in\{(0,22),(2,12),(12,2),(22,0)\}$

SUBIECTUL al III-lea

III.1 **a)** Funcția f este câtul a două funcții derivabile pe $\mathbb{R}$, iar numitorul $x^2+16 \geq 16 > 0$ nu se anulează.

Reamintim regula de derivare a câtului: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Pentru $u(x) = x+3$ și $v(x) = x^2+16$ avem $u'(x) = 1$ și $v'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+16) - (x+3) \cdot 2x}{(x^2+16)^2}$$

$$= \frac{x^2+16-2x^2-6x}{(x^2+16)^2}$$

$$= \frac{-x^2-6x+16}{(x^2+16)^2}$$

Desfacem produsul din enunț ca să comparăm numărătorii:
$(2-x)(x+8) = 2x+16-x^2-8x = -x^2-6x+16$.

Deci $f'(x) = \frac{(2-x)(x+8)}{(x^2+16)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Am arătat egalitatea cerută.

b) Reamintim definiția derivatei într-un punct: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, atunci când limita există și este finită.

Funcția f este derivabilă în $x_0 = 0$, deci:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$$

Calculăm $f'(0)$ cu formula de la a):

$$f'(0) = \frac{(2-0)(0+8)}{(0^2+16)^2}$$

$$= \frac{16}{256} = \frac{1}{16}$$

Verificăm și prin calcul direct. Avem $f(0) = \frac{3}{16}$, iar

$$f(x) - f(0) = \frac{x+3}{x^2+16} - \frac{3}{16}$$

$$= \frac{16x+48-3x^2-48}{16(x^2+16)}$$

$$= \frac{x(16-3x)}{16(x^2+16)}$$

Împărțim la $x \neq 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{16-3x}{16(x^2+16)}$, care tinde la $\frac{16}{16 \cdot 16} = \frac{1}{16}$ când $x \to 0$.

Deci $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{16}$.

c) Ideea: determinăm cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției f; dacă $m \leq f(x) \leq M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci diferența a două valori ale funcției este cel mult $M-m$ în modul.

Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$: $(2-x)(x+8) = 0$, deci $x = -8$ sau $x = 2$.

Numitorul $(x^2+16)^2$ este pozitiv, deci $f'(x)$ are semnul produsului $(2-x)(x+8)$.

Reamintim: dacă $f' < 0$ pe un interval, f este strict descrescătoare pe el; dacă $f' > 0$, f este strict crescătoare.

Pe $(-\infty, -8)$: $2-x > 0$ și $x+8 < 0$, deci $f'(x) < 0$ și f este strict descrescătoare pe $(-\infty, -8]$.

Pe $(-8,2)$: $2-x>0$ și $x+8>0$, deci $f'(x)>0$ și f este strict crescătoare pe $[-8,2]$.
Pe $(2,+\infty)$: $2-x<0$ și $x+8>0$, deci $f'(x)<0$ și f este strict descrescătoare pe $[2,+\infty)$.
Calculăm valorile în punctele critice:
$f(-8)=\dfrac{-8+3}{64+16}=\dfrac{-5}{80}=-\dfrac{1}{16}$ și $f(2)=\dfrac{2+3}{4+16}=\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$

Cea mai mică valoare: pentru $x\leq 2$, din monotonie, $f(x)\geq f(-8)=-\dfrac{1}{16}$; pentru $x>2$, $x+3>0$, deci $f(x)>0>-\dfrac{1}{16}$.

Cea mai mare valoare: pentru $x\geq -8$, din monotonie, $f(x)\leq f(2)=\dfrac{1}{4}$; pentru $x<-8$, $x+3<0$, deci $f(x)<0<\dfrac{1}{4}$.

Prin urmare $-\dfrac{1}{16}\leq f(x)\leq\dfrac{1}{4}$ și $-\dfrac{1}{16}\leq f(y)\leq\dfrac{1}{4}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

Scădem: $f(x)-f(y)\leq\dfrac{1}{4}-\left(-\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{5}{16}$ și $f(x)-f(y)\geq-\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{5}{16}$.

Am arătat că $|f(x)-f(y)|\leq\dfrac{5}{16}$, pentru orice numere reale x și y.

R: a) $f'(x)=\dfrac{(2-x)(x+8)}{(x^2+16)^2}$**; b)** $\dfrac{1}{16}$**; c)** $-\dfrac{1}{16}\leq f(x)\leq\dfrac{1}{4}$**, pentru orice** $x\in\mathbb{R}$**, deci** $|f(x)-f(y)|\leq\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{5}{16}$

III.2 **a)** Reamintim: F este o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$ dacă F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Funcția F este produsul funcțiilor derivabile $u(x)=2x-4$ și $v(x)=e^x$, deci este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Reamintim regula de derivare a produsului, $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$, și derivata $(e^x)'=e^x$.
$F'(x)=(2x-4)'\cdot e^x+(2x-4)\cdot(e^x)'$
$=2e^x+(2x-4)e^x$
$=(2+2x-4)e^x$
$=(2x-2)e^x=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$
Am arătat că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Reamintim: dacă F este o primitivă a funcției f pe un interval, atunci orice altă primitivă a lui f pe acel interval are forma $F+c$, unde c este o constantă reală.
Din a), primitiva căutată are forma:
$G(x)=(2x-4)e^x+c$, $x\in\mathbb{R}$, cu $c\in\mathbb{R}$
Calculăm $G(0)$, folosind $e^0=1$:
$G(0)=(2\cdot 0-4)\cdot e^0+c=-4+c$
Condiția $G(0)=-3$ devine ecuația:
$-4+c=-3$, deci $c=1$.
Verificăm: $G(0)=-4+1=-3$, iar $G'(x)=F'(x)=f(x)$.
Primitiva căutată este $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=(2x-4)e^x+1$.

c) Ideea: derivata a doua a unei primitive este derivata lui f; arătăm că $f'(x)\geq 0$ pe $[0,+\infty)$.
Fie H o primitivă oarecare a funcției f. Atunci $H'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
Funcția f este derivabilă, deci H este de două ori derivabilă și $H''(x)=f'(x)$.
Calculăm $f'(x)$ cu regula de derivare a produsului:
$f'(x)=(2x-2)'\cdot e^x+(2x-2)\cdot(e^x)'$
$=2e^x+(2x-2)e^x$

$= 2xe^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$

Reamintim: dacă $H''(x) \geq 0$ pentru orice x dintr-un interval, atunci H este convexă pe acel interval.

Pentru $x \in [0, +\infty)$ avem $x \geq 0$ și $e^x > 0$, deci $H''(x) = 2xe^x \geq 0$.

Deci H este convexă pe $[0, +\infty)$.

Cum H este o primitivă oarecare, am arătat că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $[0, +\infty)$.

R: a) $F'(x) = (2x - 2)e^x = f(x)$**; b)** $G(x) = (2x - 4)e^x + 1$**; c)** $H''(x) = f'(x) = 2xe^x \geq 0$**, pentru orice** $x \in [0, +\infty)$

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Simularea 46

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\sqrt[3]{162}-\sqrt[3]{48}=\sqrt[3]{6}$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx-2$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $f(-1)=1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-3x-5\right)=\log_2(3-x)$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 9.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(4,2)$ și dreapta d de ecuație $x-4y-3=0$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta d.
5p	**6.** Știind că $\sin x=-\dfrac{8}{17}$ și $x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & m+1 & -1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}-x+y+2z=6\\ 2x+(m+1)y-z=-1\\ 2x-2y+3z=9\end{cases}$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=-35$.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.
5p	**c)** Pentru $m=-1$, rezolvați sistemul de ecuații.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=-xy+6x+6y-30$.
5p	**a)** Calculați $4\circ 8$.
5p	**b)** Arătați că $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $x\circ x\geq x\circ 4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-27x-4$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=3(x-3)(x+3)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.
5p	**c)** Arătați că $x^3-27x-4\geq -58$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(4x+2)e^x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\cdot e^{-x}\,dx=4$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.
5p	**c)** Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $\left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

Simularea 46 · Rezolvări și barem

octavianghetu.ro

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simularea 46

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt[3]{162}=3\sqrt[3]{6}$ și $\sqrt[3]{48}=2\sqrt[3]{6}$	**3p**
	$3\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{6}$	**2p**
2.	$f(-1)=-m-2$, deci $-m-2=1$	**3p**
	$m=-3$	**2p**
3.	$x^2-3x-5=3-x$, deci $x^2-2x-8=0$	**3p**
	$x=-2$ ($x=4$ nu verifică condiția $3-x>0$)	**2p**
4.	90 de cazuri posibile	**2p**
	9 cazuri favorabile $(18, 27, \ldots, 90)$, deci $p=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**3p**
5.	$m_d=\dfrac{1}{4}$, deci panta dreptei căutate este $\dfrac{1}{4}$	**2p**
	$y-2=\dfrac{1}{4}(x-4)$, adică $x-4y+4=0$	**3p**
6.	$\cos^2 x=1-\dfrac{64}{289}=\dfrac{225}{289}$	**3p**
	x în cadranul al III-lea, deci $\cos x=-\dfrac{15}{17}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\big(A(2)\big)=-9-2-8-12+2-6$ (regula lui Sarrus)	**3p**
	$\det\big(A(2)\big)=-35$	**2p**
b)	$\det\big(A(m)\big)=-7m-21$	**3p**
	sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow \det\big(A(m)\big)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -3$	**2p**
c)	$\Delta=-14$, $\Delta_x=-14$, $\Delta_y=-14$, $\Delta_z=-42$	**2p**
	$(x,y,z)=(1,1,3)$	**3p**
2.a)	$4\circ 8=-32+24+48-30$	**3p**
	$4\circ 8=10$	**2p**
b)	$x\circ 5=-5x+6x+30-30=x$	**3p**
	$5\circ x=x$, deci $e=5$ este elementul neutru	**2p**

c)	$x \circ x = -(x-6)^2 + 6$ și $x \circ 4 = 2(x-6) + 6$	**2p**
	$(x-4)(x-6) \leq 0$, deci $x \in [4, 6]$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 3x^2 - 27$	**3p**
	$f'(x) = 3\left(x^2 - 9\right) = 3(x-3)(x+3)$	**2p**
b)	limita este $f'(-1)$	**3p**
	$f'(-1) = 3 - 27 = -24$	**2p**
c)	f este strict descrescătoare pe $[0, 3]$ și strict crescătoare pe $[3, +\infty)$	**2p**
	$f(3) = -58$ este valoarea minimă pe $[0, +\infty)$, deci $x^3 - 27x - 4 \geq -58$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 (4x+2)\,dx = \left(2x^2 + 2x\right)\Big\vert_0^1$	**3p**
	$4 - 0 = 4$	**2p**
b)	$\int_0^1 (4x+2)e^x\,dx = (4x+2)e^x\Big\vert_0^1 - \int_0^1 4e^x\,dx$	**3p**
	$6e - 2 - (4e - 4) = 2e + 2$	**2p**
c)	$F''(x) = f'(x) = (4x+6)e^x$, pentru orice primitivă F a lui f	**3p**
	$F''(x) \geq 0$ pe $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$, deci F este convexă pe acest interval	**2p**

Rezolvări explicate

SUBIECTUL I

I.1 Scoatem factorii de sub radicalii de ordinul 3, folosind $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$.
Descompunem: $162 = 27 \cdot 6 = 3^3 \cdot 6$, deci $\sqrt[3]{162} = 3\sqrt[3]{6}$.
Descompunem: $48 = 8 \cdot 6 = 2^3 \cdot 6$, deci $\sqrt[3]{48} = 2\sqrt[3]{6}$.
Înlocuim:
$\sqrt[3]{162} - \sqrt[3]{48} = 3\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{6}$
Dăm factor comun $\sqrt[3]{6}$:
$= (3-2)\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{6}$
Am arătat că $\sqrt[3]{162} - \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{6}$.
R: $3\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{6}$

I.2 Calculăm $f(-1)$, înlocuind x cu -1:
$f(-1) = m \cdot (-1) - 2 = -m - 2$
Scriem condiția din enunț:
$-m - 2 = 1$
$-m = 3$
$m = -3$
Verificăm: pentru $m = -3$, $f(x) = -3x - 2$ și $f(-1) = 3 - 2 = 1$.
Numărul real căutat este $m = -3$.
R: $m = -3$

I.3 Punem condițiile de existență: argumentele logaritmilor trebuie să fie strict pozitive, adică $x^2 - 3x - 5 > 0$ și $3 - x > 0$.
Funcția logaritmică $\log_2$ este injectivă, deci egalitatea logaritmilor implică egalitatea argumentelor:
$x^2 - 3x - 5 = 3 - x$
$x^2 - 2x - 8 = 0$
Calculăm discriminantul: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$, deci $x = \dfrac{2 \pm 6}{2}$.
Obținem $x = 4$ sau $x = -2$.
Pentru $x = 4$: $3 - x = -1 < 0$, deci $x = 4$ nu verifică condițiile de existență și nu convine.
Pentru $x = -2$: $3 - (-2) = 5 > 0$ și $(-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 5 = 4 + 6 - 5 = 5 > 0$, deci condițiile sunt îndeplinite.
Verificăm: ambii membri sunt egali cu $\log_2 5$.
Soluția ecuației este $x = -2$.
R: $x = -2$

I.4 Reamintim: când toate cazurile sunt egal posibile, probabilitatea unui eveniment este $p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$.

Numerele naturale de două cifre sunt $10, 11, \ldots, 99$, adică $99 - 10 + 1 = 90$ de numere: 90 de cazuri posibile.

Căutăm numerele $\overline{ab}$, cu $a \in \{1, \ldots, 9\}$, $b \in \{0, \ldots, 9\}$ și $a + b = 9$.

Pentru fiecare cifră a zecilor $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, cifra unităților este $b = 9 - a \in \{0, \ldots, 8\}$, deci corectă.

Obținem numerele $18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90$: 9 cazuri favorabile.

Calculăm probabilitatea:

$$p = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

Probabilitatea cerută este $p = \dfrac{1}{10}$.

R: $p = \dfrac{1}{10}$

I.5 Determinăm panta dreptei d, scriind ecuația ei sub forma $y = mx + n$:

$4y = x - 3$, deci $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{4}$, iar panta este $m_d = \dfrac{1}{4}$.

Reamintim: două drepte neverticale sunt paralele dacă și numai dacă au aceeași pantă (și nu coincid).

Panta dreptei căutate este $m = \dfrac{1}{4}$.

Reamintim ecuația dreptei care trece prin punctul (x_0, y_0) și are panta m: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Pentru $A(4, 2)$: $y - 2 = \dfrac{1}{4}(x - 4)$.

Înmulțim cu 4: $4y - 8 = x - 4$, adică $x - 4y + 4 = 0$.

Punctul A nu se află pe d ($4 - 8 - 3 \neq 0$), deci dreapta găsită este diferită de d.

Ecuația dreptei căutate este $x - 4y + 4 = 0$.

R: $x - 4y + 4 = 0$

I.6 Reamintim formula fundamentală a trigonometriei: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Calculăm $\cos^2 x$:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{64}{289}$$

$$= \frac{289 - 64}{289} = \frac{225}{289}$$

Deci $\cos x = \dfrac{15}{17}$ sau $\cos x = -\dfrac{15}{17}$.

Pentru $x \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ (cadranul al III-lea), cosinusul este negativ.

Valoarea $\dfrac{15}{17}$ nu convine.

Deci $\cos x = -\dfrac{15}{17}$.

R: $\cos x = -\dfrac{15}{17}$

SUBIECTUL al II-lea

II.1 **a)** Înlocuim $m=2$: $m+1=3$, deci

$$A(2)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

Reamintim regula lui Sarrus pentru o matrice $M=(a_{ij})$ de ordinul 3:

$\det M = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$
$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$

Aplicăm regula:

$\det\big(A(2)\big)=(-1)\cdot 3\cdot 3+1\cdot(-1)\cdot 2+2\cdot 2\cdot(-2)$
$-2\cdot 3\cdot 2-(-1)\cdot(-1)\cdot(-2)-1\cdot 2\cdot 3$
$=-9-2-8-12+2-6=-35$

Am arătat că $\det\big(A(2)\big)=-35$.

b) Reamintim: un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute are soluție unică dacă și numai dacă determinantul matricei sistemului este nenul (sistem de tip Cramer).

Matricea sistemului este $A(m)$. Calculăm determinantul cu regula lui Sarrus:

$\det\big(A(m)\big)=-3(m+1)+1\cdot(-1)\cdot 2+2\cdot 2\cdot(-2)$
$-2\cdot 2(m+1)-(-1)\cdot(-1)\cdot(-2)-1\cdot 2\cdot 3$
$=-3(m+1)-2-8-4(m+1)+2-6$
$=-7(m+1)-14=-7m-21=-7(m+3)$

Verificăm cu a): pentru $m=2$, $-7\cdot 5=-35$.

Determinantul se anulează doar pentru $m+3=0$, adică $m=-3$.

Deci $\det\big(A(m)\big)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -3$.

Sistemul are soluție unică pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

c) Ideea: pentru $m=-1$ determinantul este nenul, deci aplicăm regula lui Cramer: $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$.

Pentru $m=-1$, sistemul este $-x+y+2z=6$, $2x-z=-1$, $2x-2y+3z=9$, iar $\Delta=\det\big(A(-1)\big)=-7\cdot 2=-14\neq 0$.

Δ_x se obține înlocuind prima coloană cu coloana termenilor liberi $(6,-1,9)$:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}6 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ 9 & -2 & 3\end{vmatrix}=0-9+4-0-12+3=-14$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}-1 & 6 & 2\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & 9 & 3\end{vmatrix}=3-12+36+4-9-36=-14$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 6\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 9\end{vmatrix}=0-2-24-0+2-18=-42$$

Obținem $x=\dfrac{-14}{-14}=1$, $y=\dfrac{-14}{-14}=1$, $z=\dfrac{-42}{-14}=3$.

Verificăm în ecuații: $-1+1+6=6$, $2-3=-1$, $2-2+9=9$.

Soluția sistemului este $(x,y,z)=(1,1,3)$.

R: a) $\det\big(A(2)\big)=-35$; **b)** $m\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$; **c)** $(x,y,z)=(1,1,3)$

II.2 **a)** Înlocuim $x=4$ și $y=8$ în definiția legii:
$4\circ 8=-4\cdot 8+6\cdot 4+6\cdot 8-30$
$=-32+24+48-30$
$=10$
Deci $4\circ 8=10$.

b) Reamintim: e este element neutru al legii „$\circ$” dacă $x\circ e=e\circ x=x$, pentru orice număr real x.
Calculăm $x\circ 5$, pentru un număr real x oarecare:
$x\circ 5=-5x+6x+6\cdot 5-30$
$=-5x+6x+30-30=x$
Calculăm și $5\circ x$:
$5\circ x=-5x+6\cdot 5+6x-30=x$
Deci $x\circ 5=5\circ x=x$, pentru orice număr real x.
Am arătat că $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

c) Ideea: scriem legea ca un produs plus o constantă; inecuația devine o inecuație de gradul al doilea, cu factorul comun $x-6$.
Observăm că $(x-6)(y-6)=xy-6x-6y+36$, deci $-xy+6x+6y-30=-(x-6)(y-6)+6$.
Așadar $x\circ y=-(x-6)(y-6)+6$.
Calculăm cei doi membri ai inecuației:
$x\circ x=-(x-6)^2+6$
$x\circ 4=-(x-6)(4-6)+6=2(x-6)+6$
Inecuația devine:
$-(x-6)^2+6\geq 2(x-6)+6$
$-(x-6)^2-2(x-6)\geq 0$
Înmulțim cu -1 și schimbăm sensul inegalității: $(x-6)^2+2(x-6)\leq 0$.
Dăm factor comun $x-6$: $(x-6)(x-6+2)\leq 0$, adică $(x-4)(x-6)\leq 0$.
Reamintim: trinomul de gradul al doilea cu coeficientul dominant pozitiv este negativ sau nul între rădăcini (inclusiv în ele).
Rădăcinile sunt 4 și 6, deci $(x-4)(x-6)\leq 0\Leftrightarrow x\in[4,6]$.
Mulțimea soluțiilor inecuației este $[4,6]$.
R: a) $4\circ 8=10$; **b)** $x\circ 5=5\circ x=x$, **deci** $e=5$; **c)** $x\in[4,6]$

SUBIECTUL al III-lea

III.1 **a)** Derivăm termen cu termen. Reamintim: $(x^n)'=nx^{n-1}$, iar derivata unei constante este 0.
$f'(x)=3x^2-27$
Dăm factor comun 3:
$f'(x)=3\left(x^2-9\right)$
Folosim formula $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$: $x^2-9=(x-3)(x+3)$.
Deci $f'(x)=3(x-3)(x+3)$.
Am arătat egalitatea cerută, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Reamintim definiția derivatei într-un punct: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, pentru o funcție derivabilă în a.
Pentru $a=-1$ avem $x-a=x+1$, deci limita cerută este exact $f'(-1)$.
Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci și în -1.
Calculăm cu formula de la a):
$f'(-1)=3\cdot(-1-3)\cdot(-1+3)$
$=3\cdot(-4)\cdot 2$

$= -24$

Putem verifica și cu forma $f'(x) = 3x^2 - 27$: $f'(-1) = 3 - 27 = -24$.

Deci $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -24$.

c) Ideea: studiem monotonia lui f pe $[0, +\infty)$ și arătăm că valoarea minimă a lui f pe acest interval este -58.

Rezolvăm $f'(x) = 0$: $x = 3$ sau $x = -3$; în intervalul $[0, +\infty)$ se află doar $x = 3$.

Pentru $x \geq 0$ avem $x + 3 > 0$, deci semnul lui $f'(x)$ este semnul lui $x - 3$.

Pe $[0, 3)$ avem $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $[0, 3]$.

Pe $(3, +\infty)$ avem $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $[3, +\infty)$.

Deci $x = 3$ este punctul de minim al lui f pe $[0, +\infty)$.

Calculăm valoarea minimă: $f(3) = 27 - 81 - 4 = -58$.

Pentru $x \in [0, 3]$: $f(x) \geq f(3) = -58$; pentru $x \in [3, +\infty)$: $f(x) \geq f(3) = -58$.

Am arătat că $x^3 - 27x - 4 \geq -58$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.

R: a) $f'(x) = 3(x - 3)(x + 3)$**; b)** -24**; c) minimul lui** f **pe** $[0, +\infty)$ **este** $f(3) = -58$

III.2

a) Simplificăm funcția de sub integrală: $f(x) \cdot e^{-x} = (4x + 2)e^x \cdot e^{-x} = 4x + 2$, deoarece $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$.

Reamintim formula Leibniz–Newton: $\int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a)$, unde G este o primitivă a funcției continue g.

O primitivă a funcției $4x + 2$ este $2x^2 + 2x$, deoarece $\left(2x^2 + 2x\right)' = 4x + 2$.

$\int_0^1 f(x) \cdot e^{-x}\,dx = \int_0^1 (4x + 2)\,dx = \left(2x^2 + 2x\right)\Big|_0^1$

$= (2 + 2) - 0$

$= 4$

Am arătat că $\int_0^1 f(x) \cdot e^{-x}\,dx = 4$.

b) Folosim integrarea prin părți, deoarece integrandul este produsul dintre un polinom de gradul I și e^x.

Reamintim formula: $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$.

Alegem $u(x) = 4x + 2$, cu $u'(x) = 4$, și $v'(x) = e^x$, cu $v(x) = e^x$.

$\int_0^1 (4x + 2)e^x\,dx = (4x + 2)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 4e^x\,dx$

Calculăm termenul integrat: $6e^1 - 2e^0 = 6e - 2$.

Calculăm a doua integrală: $\int_0^1 4e^x\,dx = 4e^x\Big|_0^1 = 4e - 4$.

Obținem:

$\int_0^1 f(x)\,dx = 6e - 2 - (4e - 4)$

$= 2e + 2$

Integrala este egală cu $2e + 2$.

c) Ideea: dacă F este o primitivă a lui f, atunci $F'' = f'$; convexitatea lui F se citește din semnul lui f'.

Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci are primitive; fie F o primitivă oarecare a lui f.

Din definiția primitivei, $F'(x) = f(x)$; cum f este derivabilă, $F''(x) = f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Calculăm $f'(x)$ cu regula produsului $(u \cdot v)' = u'v + uv'$:

$f'(x) = 4e^x + (4x + 2)e^x = (4x + 6)e^x$

Reamintim: dacă $F''(x) \geq 0$ pe un interval, atunci F este convexă pe acel interval.

Pentru $x \geq -\dfrac{3}{2}$ avem $4x+6 \geq 0$, iar $e^x > 0$.

Deci $F''(x) = (4x+6)e^x \geq 0$, pentru orice $x \in \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.

Primitiva F a fost aleasă oarecare.

Am arătat că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.

R: a) 4; **b)** $2e+2$; **c)** $F''(x) = f'(x) = (4x+6)e^x \geq 0$ **pe** $\left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Simularea 100

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{5}=2\sqrt[3]{5}$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x-5$. Arătați că $f(a)+f(-a)=-10$, pentru orice număr real a.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-3x+2}=1$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea primelor 30 de numere naturale nenule, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 5.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(7,-6)$, $N(5,-6)$, $P(3,-3)$ și $Q(a,b)$. Determinați numerele reale a și b pentru care segmentele MN și PQ au același mijloc.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu catetele $AB=15$ și $AC=20$. Determinați lungimea înălțimii din A a triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & -x\\ -2x & 1+x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\big(A(-2)\big)=-5$.
5p	**b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)=A(-3)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{xy-2x-2y+10}{3}$.
5p	**a)** Calculați $8\circ(-2)$.
5p	**b)** Arătați că $x\circ 2=2$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care $m\circ n=5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-8\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2(x-4)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.
5p	**c)** Arătați că $2x-8\ln x\geq 8-16\ln 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-1+\dfrac{4}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^3\big(x\,f(x)-3x^3\big)\,dx=4$.

5p	**b)** Calculați $\int_1^{\sqrt{e}} \left(f(x) - 3x^2 + 1\right) \ln x \, dx$.
5p	**c)** Determinați numărul real m, $m > 1$, pentru care $\int_1^m \dfrac{x\, f(x) - 4}{x}\, dx = 24$.

Simularea 100 · Rezolvări și barem

octavianghetu.ro

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simularea 100

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt[3]{135}=3\sqrt[3]{5}$	**3p**
	$3\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5}=2\sqrt[3]{5}$	**2p**
2.	$f(a)=-a-5$ și $f(-a)=a-5$	**3p**
	$(-a-5)+(a-5)=-10$	**2p**
3.	$5^{x^2-3x+2}=5^0$, deci $x^2-3x+2=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=2$	**2p**
4.	30 de cazuri posibile și 3 cazuri favorabile (5, 14, 23)	**3p**
	$p=\dfrac{3}{30}=\dfrac{1}{10}$	**2p**
5.	mijlocul segmentului MN este $S(6,-6)$	**2p**
	$\dfrac{3+a}{2}=6$ și $\dfrac{-3+b}{2}=-6$, deci $a=9$ și $b=-9$	**3p**
6.	$BC^2=225+400$, deci $BC=25$	**2p**
	$AD=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=\dfrac{300}{25}=12$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-2)=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ și $\det\big(A(-2)\big)=(-3)\cdot(-1)-2\cdot 4$	**3p**
	$=3-8=-5$	**2p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1+2x+2y+6xy & -x-y-3xy\\ -2x-2y-6xy & 1+x+y+3xy\end{pmatrix}$	**3p**
	$=A(x+y+3xy)$	**2p**
c)	$A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)=A(t)$, cu $1+3t=(1+3x)^3$	**2p**
	$(1+3x)^3=-8$, deci $1+3x=-2$ și $x=-1$	**3p**
2.a)	$8\circ(-2)=\dfrac{-16-16+4+10}{3}$	**3p**
	$=\dfrac{-18}{3}=-6$	**2p**

b)	$x \circ 2 = \dfrac{2x - 2x - 4 + 10}{3}$	**3p**
	$= \dfrac{6}{3} = 2$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$m \circ n = \dfrac{(m-2)(n-2)+6}{3}$, deci $(m-2)(n-2) = 9$	**2p**
	$(m, n) \in \{(-7, 1), (-1, -1), (1, -7), (3, 11), (5, 5), (11, 3)\}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x}$	**3p**
	$f'(x) = \dfrac{2(x-4)}{x}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$	**3p**
	$f'(2) = -2$	**2p**
c)	f este strict descrescătoare pe $(0, 4]$ și strict crescătoare pe $[4, +\infty)$	**2p**
	$f(x) \geq f(4) = 8 - 16\ln 2$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	**3p**
2.a)	$x\,f(x) - 3x^3 = 4 - x$, deci integrala este $\left(4x - \dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3$	**3p**
	$\dfrac{15}{2} - \dfrac{7}{2} = 4$	**2p**
b)	$\int_1^{\sqrt{e}} \dfrac{4\ln x}{x}\,dx = 2\ln^2 x\Big|_1^{\sqrt{e}}$	**3p**
	$2 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	$\int_1^m \left(3x^2 - 1\right) dx = m^3 - m$	**3p**
	$m^3 - m - 24 = (m-3)\left(m^2 + 3m + 8\right) = 0$, deci $m = 3$	**2p**

Rezolvări explicate

SUBIECTUL I

I.1 Descompunem numărul de sub primul radical: $135 = 27 \cdot 5 = 3^3 \cdot 5$.
Folosim proprietatea $\sqrt[3]{a^3 \cdot b} = a\sqrt[3]{b}$:
$\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = 3\sqrt[3]{5}$
Înlocuim și dăm factor comun $\sqrt[3]{5}$:
$\sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5}$
$= (3-1)\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$
Am arătat că $\sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$.
R: $2\sqrt[3]{5}$

I.2 Calculăm cele două valori ale funcției, înlocuind x în formula lui f:
$f(a) = -a - 5$
$f(-a) = -(-a) - 5 = a - 5$
Adunăm:
$f(a) + f(-a) = (-a-5) + (a-5)$
$= -a + a - 5 - 5$
$= -10$
Rezultatul nu depinde de a.
Am arătat că $f(a) + f(-a) = -10$, pentru orice număr real a.
R: $f(a) + f(-a) = -10$

I.3 Scriem membrul drept ca o putere a lui 5: $1 = 5^0$.
Ecuația devine $5^{x^2-3x+2} = 5^0$.
Funcția exponențială de bază 5 este injectivă, deci exponenții sunt egali:
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$\Delta = 9 - 8 = 1$, deci $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$, adică $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$.
Verificăm: pentru $x = 1$, $5^{1-3+2} = 5^0 = 1$; pentru $x = 2$, $5^{4-6+2} = 5^0 = 1$.
Soluțiile ecuației sunt $x = 1$ și $x = 2$.
R: $x \in \{1, 2\}$

I.4 Reamintim: când toate cazurile sunt egal posibile, probabilitatea unui eveniment este raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul cazurilor posibile.
Mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ are 30 de elemente, deci sunt 30 de cazuri posibile.
Căutăm numerele cu suma cifrelor 5: dintre numerele de o cifră, doar 5.
Dintre numerele de două cifre $\overline{ab}$ cu $a + b = 5$, cel mult egale cu 30, sunt 14 și 23 (următorul, 32, este mai mare decât 30).
Deci sunt 3 cazuri favorabile: 5, 14 și 23.
Calculăm probabilitatea:
$$p = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$
Probabilitatea cerută este $\dfrac{1}{10}$.
R: $p = \dfrac{1}{10}$

I.5

Reamintim: mijlocul segmentului UV are coordonatele $\left(\frac{x_U+x_V}{2}, \frac{y_U+y_V}{2}\right)$.

Calculăm mijlocul S al segmentului MN:

$x_S = \frac{7+5}{2} = 6$, $y_S = \frac{-6+(-6)}{2} = -6$, deci $S(6,-6)$.

Punctul S trebuie să fie și mijlocul segmentului PQ:

$\frac{3+a}{2} = 6 \Leftrightarrow 3+a = 12 \Leftrightarrow a = 9$

$\frac{-3+b}{2} = -6 \Leftrightarrow -3+b = -12 \Leftrightarrow b = -9$

Verificăm: mijlocul segmentului PQ, cu $Q(9,-9)$, este $\left(\frac{3+9}{2}, \frac{-3-9}{2}\right) = (6,-6)$.

Numerele căutate sunt $a = 9$ și $b = -9$.

R: $a = 9$, $b = -9$

I.6

Aplicăm teorema lui Pitagora pentru a afla ipotenuza: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

$BC^2 = 225 + 400 = 625$, deci $BC = 25$.

Notăm cu D piciorul înălțimii din A. Scriem aria triunghiului în două moduri:

$\mathcal{A} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2}$

Deci $AB \cdot AC = BC \cdot AD$:

$15 \cdot 20 = 25 \cdot AD$

$AD = \frac{300}{25} = 12$

Lungimea înălțimii din A este 12.

R: $AD = 12$

SUBIECTUL al II-lea

II.1 **a)** Pentru $x=-2$ obținem:

$A(-2)=\begin{pmatrix}1-4 & 2\\ 4 & 1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

Reamintim determinantul de ordinul 2: $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$.

$\det\big(A(-2)\big)=(-3)\cdot(-1)-2\cdot 4$

$=3-8$

$=-5$

Am arătat că $\det\big(A(-2)\big)=-5$.

b) Reamintim înmulțirea matricelor de ordinul 2:

$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ap+br & aq+bs\\ cp+dr & cq+ds\end{pmatrix}$

Notăm $t=x+y+3xy$ și calculăm, pe rând, elementele produsului $A(x)\cdot A(y)$.

Linia 1, coloana 1:

$(1+2x)(1+2y)+(-x)(-2y)=1+2x+2y+4xy+2xy=1+2t$

Linia 1, coloana 2:

$(1+2x)(-y)+(-x)(1+y)=-y-2xy-x-xy=-t$

Linia 2, coloana 1:

$-2x(1+2y)+(1+x)(-2y)=-2x-4xy-2y-2xy=-2t$

Linia 2, coloana 2:

$-2x\cdot(-y)+(1+x)(1+y)=2xy+1+x+y+xy=1+t$

Am obținut:

$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1+2t & -t\\ -2t & 1+t\end{pmatrix}=A(t)$

Am arătat că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Ideea: aplicăm de două ori relația de la b), ca să scriem produsul ca o singură matrice $A(\ldots)$, apoi comparăm cu $A(-3)$.

Observăm că $1+3(x+y+3xy)=(1+3x)(1+3y)$; așadar, la înmulțire, numerele $1+3x$ se înmulțesc.

Din b), pentru $y=x$: $A(x)\cdot A(x)=A(t_1)$, cu $1+3t_1=(1+3x)^2$.

Aplicăm din nou b): $A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)=A(t_1)\cdot A(x)=A(t_2)$, cu

$1+3t_2=(1+3t_1)(1+3x)=(1+3x)^3$.

Observăm că din $A(a)=A(b)$ rezultă $a=b$: elementele de pe linia 1, coloana 2 sunt $-a$ și $-b$.

Deci ecuația este echivalentă cu $t_2=-3$, adică $1+3t_2=1+3\cdot(-3)=-8$:

$(1+3x)^3=-8=(-2)^3$

Funcția $u\mapsto u^3$ este injectivă pe $\mathbb{R}$, deci $1+3x=-2$.

$3x=-3$, deci $x=-1$.

Verificăm: $A(-1)\cdot A(-1)=A(-1-1+3)=A(1)$ și $A(1)\cdot A(-1)=A(1-1-3)=A(-3)$.

Numărul real căutat este $x=-1$.

R: a) $\det\big(A(-2)\big)=-5$; **b)** $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+3xy)$; **c)** $x=-1$

II.2 **a)** Înlocuim $x=8$ și $y=-2$ în definiția legii:

$$8\circ(-2)=\frac{8\cdot(-2)-2\cdot 8-2\cdot(-2)+10}{3}$$
$$=\frac{-16-16+4+10}{3}$$
$$=\frac{-18}{3}$$
$$=-6$$

Deci $8\circ(-2)=-6$.

b) Înlocuim $y=2$ în definiția legii, pentru un număr real x oarecare:

$$x\circ 2=\frac{2x-2x-4+10}{3}$$

Primul termen al numărătorului este $x\cdot 2=2x$, iar al treilea este $-2\cdot 2=-4$.
Termenii care îl conțin pe x se reduc: $2x-2x=0$.

$$x\circ 2=\frac{-4+10}{3}$$
$$=\frac{6}{3}$$
$$=2$$

Rezultatul nu depinde de x.
Am arătat că $x\circ 2=2$, pentru orice număr real x.

c) Ideea: scriem legea sub forma restrânsă și transformăm ecuația într-un produs de două numere întregi egal cu un număr dat.
Observăm că $x\cdot y-2x-2y+4=(x-2)(y-2)$, deci $x\cdot y-2x-2y+10=(x-2)(y-2)+6$.
Ecuația $m\circ n=5$ devine:

$$\frac{(m-2)(n-2)+6}{3}=5\Leftrightarrow(m-2)(n-2)+6=15$$
$$(m-2)(n-2)=9$$

Pentru m și n întregi, $m-2$ și $n-2$ sunt numere întregi al căror produs este 9, deci $m-2$ este un divizor întreg al lui 9.
Divizorii întregi ai lui 9 sunt ±1, ±3, ±9.
$m-2=1,\ n-2=9$: $(m,n)=(3,11)$; $m-2=9,\ n-2=1$: $(m,n)=(11,3)$
$m-2=3,\ n-2=3$: $(m,n)=(5,5)$
$m-2=-1,\ n-2=-9$: $(m,n)=(1,-7)$; $m-2=-9,\ n-2=-1$: $(m,n)=(-7,1)$
$m-2=-3,\ n-2=-3$: $(m,n)=(-1,-1)$
Perechile căutate sunt $(-7,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-7)$, $(3,11)$, $(5,5)$ și $(11,3)$.

R: a) $8\circ(-2)=-6$; **b)** $x\circ 2=2$; **c)** $(m,n)\in\{(-7,1),(-1,-1),(1,-7),(3,11),(5,5),(11,3)\}$

SUBIECTUL al III-lea

III.1 **a)** Reamintim derivatele: $(x)'=1$ și $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, pentru $x>0$.

Folosim regula de derivare a diferenței și $(c\cdot u)'=c\cdot u'$:

$$f'(x)=2\cdot 1-8\cdot\frac{1}{x}=2-\frac{8}{x}$$

Aducem la numitorul comun x:

$$f'(x)=\frac{2x-8}{x}=\frac{2(x-4)}{x}$$

Am arătat că $f'(x)=\dfrac{2(x-4)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Reamintim definiția derivatei într-un punct: dacă f este derivabilă în a, atunci $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.
Funcția f este derivabilă pe $(0,+\infty)$, ca diferență de funcții derivabile, iar $2\in(0,+\infty)$.
Deci limita există și este egală cu derivata în 2.
Pentru $x\to 2$, atât numărătorul $f(x)-f(2)$, cât și numitorul $x-2$ tind la 0.
Limita cerută este $f'(2)$.
Folosim expresia derivatei de la a):
$f'(2)=\dfrac{2\cdot(2-4)}{2}$
$=\dfrac{-4}{2}=-2$
Deci $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-2$.

c) Ideea: arătăm că valoarea minimă a funcției f pe $(0,+\infty)$ este $f(4)=8-16\ln 2$.
Reamintim: dacă $f'<0$ pe un interval, f este strict descrescătoare pe el; dacă $f'>0$, f este strict crescătoare.
Pentru $x>0$, numitorul lui $f'(x)=\dfrac{2(x-4)}{x}$ este pozitiv, deci semnul lui $f'(x)$ este semnul lui $x-4$.
Pentru $x\in(0,4)$: $x-4<0$, deci $f'(x)<0$, iar f este strict descrescătoare pe $(0,4]$.
Pentru $x\in(4,+\infty)$: $x-4>0$, deci $f'(x)>0$, iar f este strict crescătoare pe $[4,+\infty)$.
Deci $x=4$ este punct de minim, iar $f(x)\geq f(4)$, pentru orice $x>0$.
Calculăm valoarea minimă, folosind $\ln 4=\ln 2^2=2\ln 2$:
$f(4)=2\cdot 4-8\ln 4$
$=8-16\ln 2$
Deci $f(x)\geq 8-16\ln 2$, adică $2x-8\ln x\geq 8-16\ln 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

R: a) $f'(x)=\dfrac{2(x-4)}{x}$**; b)** -2**; c) minimul lui** f **este** $f(4)=8-16\ln 2$

III.2 **a)** Simplificăm integrandul: $x\,f(x)=3x^3-x+4$, deci $x\,f(x)-3x^3=4-x$.
Reamintim formula Leibniz–Newton: dacă G este o primitivă a funcției continue g pe $[a,b]$, atunci $\int_a^b g(x)\,dx=G(b)-G(a)$.

O primitivă a funcției $4-x$ este $4x-\dfrac{x^2}{2}$, deci:

$\int_1^3(4-x)\,dx=\left(4x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3$
$=\left(12-\dfrac{9}{2}\right)-\left(4-\dfrac{1}{2}\right)$
$=\dfrac{15}{2}-\dfrac{7}{2}=4$

Am arătat că $\int_1^3\left(x\,f(x)-3x^3\right)dx=4$.

b) Simplificăm integrandul: $f(x)-3x^2+1=\dfrac{4}{x}$, deci integrala este $\int_1^{\sqrt{e}}\dfrac{4\ln x}{x}\,dx$.

Observăm că $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, deci integrandul are forma $4\,u(x)\,u'(x)$, cu $u(x)=\ln x$.

Reamintim: o primitivă a funcției $u \cdot u'$ este $\frac{u^2}{2}$, deoarece $\left(\frac{u^2}{2}\right)' = u \cdot u'$.

Deci o primitivă a funcției $\frac{4\ln x}{x}$ este $2\ln^2 x$.

Aplicăm formula Leibniz–Newton:

$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{4\ln x}{x}\,dx = 2\ln^2 x\Big|_1^{\sqrt{e}}$

Folosim $\ln\sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ și $\ln 1 = 0$:

$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0$

$= \frac{1}{2}$

Deci $\int_1^{\sqrt{e}} \left(f(x) - 3x^2 + 1\right)\ln x\,dx = \frac{1}{2}$.

c) Ideea: calculăm integrala în funcție de m, obținem o ecuație de gradul al III-lea în m și o descompunem în factori.

Din a), $x\,f(x) = 3x^3 - x + 4$, deci $\frac{x\,f(x) - 4}{x} = \frac{3x^3 - x}{x} = 3x^2 - 1$.

O primitivă a funcției $3x^2 - 1$ este $x^3 - x$, deci:

$\int_1^m \left(3x^2 - 1\right)dx = \left(x^3 - x\right)\Big|_1^m = m^3 - m - (1 - 1) = m^3 - m$

Ecuația devine:

$m^3 - m = 24 \Leftrightarrow m^3 - m - 24 = 0$

Observăm că $m = 3$ verifică ecuația: $27 - 3 - 24 = 0$.

Descompunem (de exemplu cu schema lui Horner): $m^3 - m - 24 = (m - 3)\left(m^2 + 3m + 8\right)$.

Ecuația $m^2 + 3m + 8 = 0$ are $\Delta = 9 - 32 = -23 < 0$, deci nu are soluții reale.

Valoarea $m = 3$ verifică $m > 1$.

Numărul căutat este $m = 3$.

R: a) 4; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $m = 3$

AI VĂZUT 3 DIN 105

Vrei toate simulările, cu rezolvări și barem?

În culegere primești:

- **105 simulări**, de la primii paşi până la nivelul examenului;
- după fiecare, **baremul** şi **rezolvarea explicată** a fiecărui exercițiu;
- PDF cu numele tău, îl păstrezi pentru totdeauna.

Cumpără culegerea