PROBĂ GRATUITĂ

105 Simulări pentru Bacalaureat la Matematică

Profil Tehnologic · Octavian Gheţu

3 simulări din culegere, câte una de pe fiecare nivel de dificultate.

După fiecare simulare găsești **baremul** (ca la minister) și **rezolvarea explicată pas cu pas** a fiecărui exercițiu — exact ca în culegere.

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Simularea 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $8 \cdot \left(\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)-9=9$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+4$. Determinați numărul real m pentru care $f(m)=5$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+1}=8$.
5p	**4.** Un produs costă 800 de lei. Determinați prețul produsului după o ieftinire cu 20%.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,2)$ și $B(-16,-3)$. Arătați că $AB=13$.
5p	**6.** Arătați că $\cos^2 60^\circ - 2\sin^2 60^\circ = -\frac{5}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$, $M(x)=\begin{pmatrix}-2x+1 & 2x\\ -2x & 3x+1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\big(M(3)\big)=-14$.
5p	**b)** Arătați că $M(-1)+M(1)=2M(0)$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A-xI_2)=0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+8x+8y+56$.
5p	**a)** Arătați că $1\circ(-3)=37$.
5p	**b)** Arătați că legea „$\circ$” este comutativă și calculați $(-8)\circ 0$.
5p	**c)** Determinați numărul real a pentru care $x\circ a=a$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^x-3$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=(x+2)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x^2-24x+18$.
5p	**a)** Arătați că $\int f(x)\,dx=2x^3-12x^2+18x+\mathcal{C}$.
5p	**b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(0)=4$.

5p	**c)** Arătați că orice primitivă a funcției f este descrescătoare pe intervalul $[1, 3]$.

Simularea 1 · Rezolvări și barem

octavianghetu.ro

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simularea 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$	**3p**
	$8\cdot\frac{9}{4}-9=18-9=9$	**2p**
2.	$f(m)=-m+4$, deci $-m+4=5$	**3p**
	$m=-1$	**2p**
3.	$8=2^3$, deci $2^{x+1}=2^3\Leftrightarrow x+1=3$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	$\frac{20}{100}\cdot 800=160$ de lei	**3p**
	prețul după ieftinire este $800-160=640$ de lei	**2p**
5.	$AB=\sqrt{(-16+4)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{(-12)^2+(-5)^2}$	**3p**
	$AB=\sqrt{169}=13$	**2p**
6.	$\cos^2 60^\circ=\frac{1}{4}$ și $\sin^2 60^\circ=\frac{3}{4}$	**3p**
	$\frac{1}{4}-2\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}-\frac{6}{4}=-\frac{5}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(3)=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -6 & 10\end{pmatrix}$ și $\det\left(M(3)\right)=(-5)\cdot 10-6\cdot(-6)$	**3p**
	$\det\left(M(3)\right)=-50+36=-14$	**2p**
b)	$M(-1)+M(1)=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$	**3p**
	$2M(0)=2I_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, deci $M(-1)+M(1)=2M(0)$	**2p**
c)	$\det(A-xI_2)=(1-x)(2-x)-6=x^2-3x-4$	**2p**
	$x^2-3x-4=0$, cu $\Delta=25$, deci $x=-1$ sau $x=4$	**3p**
2.a)	$1\circ(-3)=1\cdot(-3)+8\cdot 1+8\cdot(-3)+56$	**3p**
	$1\circ(-3)=-3+8-24+56=37$	**2p**

b)	$y \circ x = yx + 8y + 8x + 56 = xy + 8x + 8y + 56 = x \circ y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, deci legea este comutativă	**3p**
	$(-8) \circ 0 = 0 - 64 + 0 + 56 = -8$	**2p**
c)	$x \circ a = a \Leftrightarrow xa + 8x + 7a + 56 = 0 \Leftrightarrow (a + 8)(x + 7) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**2p**
	pentru $x = 0$ obținem $a + 8 = 0$, deci $a = -8$, care verifică $x \circ (-8) = -8$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = (x + 1)'e^x + (x + 1)(e^x)' - 0 = e^x + (x + 1)e^x$	**3p**
	$f'(x) = (x + 2)e^x$	**2p**
b)	$f(0) = -2$ și $f'(0) = 2$	**3p**
	$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, deci ecuația tangentei este $y = 2x - 2$	**2p**
c)	tangenta este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow (a + 2)e^a = 0$	**2p**
	$e^a > 0$, deci $a + 2 = 0$, adică abscisa căutată este $x = -2$	**3p**
2.a)	$\int f(x)\,dx = 6 \cdot \dfrac{x^3}{3} - 24 \cdot \dfrac{x^2}{2} + 18x + \mathcal{C}$	**3p**
	$\int f(x)\,dx = 2x^3 - 12x^2 + 18x + \mathcal{C}$	**2p**
b)	$F(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + c$, $c \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F(0) = c = 4$, deci $F(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 4$	**3p**
c)	$F'(x) = f(x) = 6(x - 1)(x - 3)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**2p**
	$f(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [1, 3]$, deci F este descrescătoare pe $[1, 3]$	**3p**

Rezolvări explicate

SUBIECTUL I

I.1 Respectăm ordinea efectuării operațiilor: întâi calculăm paranteza, apoi înmulțirea și la final scăderea.
Ca să adunăm fracțiile din paranteză, le aducem la numitorul comun 4.
Amplificăm prima fracție cu 2:

$$\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{6}{4}$$

Adunăm fracțiile care au același numitor, adunând numărătorii:

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

Efectuăm înmulțirea, simplificând 8 cu 4:

$$8\cdot\frac{9}{4}=2\cdot 9=18$$

Efectuăm scăderea:

$$18-9=9$$

Am arătat că $8\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)-9=9$.

R: 9

I.2 Calculăm $f(m)$, înlocuind x cu m în expresia funcției:
$f(m)=-m+4$
Condiția $f(m)=5$ devine ecuația:
$-m+4=5$
Trecem 4 în membrul drept, cu semn schimbat:
$-m=5-4$
$-m=1$
Înmulțim ambii membri cu -1:
$m=-1$
Verificăm: $f(-1)=-(-1)+4=1+4=5$.
Numărul căutat este $m=-1$.

R: $m=-1$

I.3 Ecuația este exponențială; scriem ambii membri ca puteri ale aceleiași baze, 2.
Descompunem numărul 8:

$$8=2\cdot 2\cdot 2=2^3$$

Ecuația devine:

$$2^{x+1}=2^3$$

Reamintim: pentru $a>0$, $a\neq 1$, avem $a^u=a^v\Leftrightarrow u=v$.
Egalăm exponenții:
$x+1=3$
$x=3-1=2$
Verificăm: $2^{2+1}=2^3=8$.
Soluția ecuației este $x=2$.

R: $x=2$

I.4

Reamintim: $p\%$ dintr-un număr N înseamnă $\frac{p}{100}\cdot N$.

Calculăm cu câți lei se ieftinește produsul, adică 20% din 800 de lei:

$\frac{20}{100}\cdot 800 = 20\cdot 8 = 160$ de lei

La o ieftinire, scădem această sumă din prețul inițial:

$800 - 160 = 640$ de lei

Verificăm altfel: după ieftinire, prețul nou reprezintă $100\% - 20\% = 80\%$ din prețul inițial.

$\frac{80}{100}\cdot 800 = 80\cdot 8 = 640$ de lei

Prețul produsului după ieftinire este de 640 de lei.

R: 640 de lei

I.5

Reamintim formula distanței dintre două puncte $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$:

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Calculăm diferența absciselor:

$x_B - x_A = -16 - (-4) = -16 + 4 = -12$

Calculăm diferența ordonatelor:

$y_B - y_A = -3 - 2 = -5$

Înlocuim în formulă:

$AB = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25}$

$= \sqrt{169} = 13$

Am arătat că $AB = 13$.

R: $AB = 13$

I.6

Reamintim valorile remarcabile pentru unghiul de 60°:

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ și $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Calculăm pătratele:

$\cos^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\sin^2 60^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

Calculăm produsul:

$2\sin^2 60^\circ = 2\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

Efectuăm scăderea, aducând la numitorul comun 4:

$\frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4} - \frac{6}{4} = -\frac{5}{4}$

Am arătat că $\cos^2 60^\circ - 2\sin^2 60^\circ = -\frac{5}{4}$.

R: $-\frac{5}{4}$

SUBIECTUL al II-lea

II.1 **a)** Înlocuim $x=3$ în fiecare element al matricei $M(x)$:
$-2\cdot 3+1=-5$, $2\cdot 3=6$, $-2\cdot 3=-6$, $3\cdot 3+1=10$
Obținem:
$M(3)=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -6 & 10\end{pmatrix}$
Reamintim: $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=a\cdot d-b\cdot c$.
Calculăm determinantul:
$\det\big(M(3)\big)=(-5)\cdot 10-6\cdot(-6)$
$=-50+36$
$=-14$
Am arătat că $\det\big(M(3)\big)=-14$.

b) Calculăm pe rând matricele din egalitate, înlocuind x în $M(x)$.
Pentru $x=-1$: $-2\cdot(-1)+1=3$, $2\cdot(-1)=-2$, $-2\cdot(-1)=2$, $3\cdot(-1)+1=-2$, deci:
$M(-1)=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$
Pentru $x=1$: $-2\cdot 1+1=-1$, $2\cdot 1=2$, $-2\cdot 1=-2$, $3\cdot 1+1=4$, deci:
$M(1)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$
Reamintim: două matrice de același tip se adună element cu element.
$M(-1)+M(1)=\begin{pmatrix}3+(-1) & -2+2\\ 2+(-2) & -2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
Pentru $x=0$ obținem $M(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$.
Reamintim: o matrice se înmulțește cu un număr înmulțind fiecare element cu acel număr.
$2M(0)=\begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 0\\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
Cele două matrice sunt egale, deci am arătat că $M(-1)+M(1)=2M(0)$.

c) Ideea: scriem matricea $A-xI_2$, calculăm determinantul ei ca expresie în x și rezolvăm ecuația de gradul al doilea obținută.
Calculăm $xI_2=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$ și scădem element cu element:
$A-xI_2=\begin{pmatrix}1-x & -2\\ -3 & 2-x\end{pmatrix}$
Aplicăm formula determinantului de ordinul al doilea:
$\det(A-xI_2)=(1-x)(2-x)-(-2)\cdot(-3)$
$=2-x-2x+x^2-6$
$=x^2-3x-4$
Rezolvăm ecuația $x^2-3x-4=0$. Reamintim: pentru $ax^2+bx+c=0$, cu $a\neq 0$, avem $\Delta=b^2-4ac$, iar dacă $\Delta\geq 0$, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.
$\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)=9+16=25$
$x_{1,2}=\dfrac{3\pm 5}{2}$, deci $x_1=\dfrac{3-5}{2}=-1$ și $x_2=\dfrac{3+5}{2}=4$
Numerele reale căutate sunt $x=-1$ și $x=4$.

R: a) $\det\big(M(3)\big)=-14$; **b)** $M(-1)+M(1)=2M(0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; **c)** $x\in\{-1,4\}$

II.2 **a)** Aplicăm definiția legii pentru $x=1$ și $y=-3$:
$1\circ(-3)=1\cdot(-3)+8\cdot 1+8\cdot(-3)+56$
Calculăm fiecare termen:
$=-3+8-24+56$
Grupăm separat termenii negativi și termenii pozitivi:
$=(-3-24)+(8+56)=-27+64$
$=37$
Am arătat că $1\circ(-3)=37$.

b) Reamintim: legea „$\circ$” este comutativă dacă $x\circ y=y\circ x$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.
Fie $x,y\in\mathbb{R}$. Scriem $y\circ x$ din definiția legii, schimbând rolurile lui x și y:
$y\circ x=yx+8y+8x+56$
Înmulțirea și adunarea numerelor reale sunt comutative, deci $yx=xy$ și $8y+8x=8x+8y$.
Obținem:
$y\circ x=xy+8x+8y+56=x\circ y$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$
Deci legea „$\circ$” este comutativă.
Calculăm $(-8)\circ 0$, aplicând definiția pentru $x=-8$ și $y=0$:
$(-8)\circ 0=(-8)\cdot 0+8\cdot(-8)+8\cdot 0+56$
$=0-64+0+56=-8$
Am arătat că legea este comutativă și am obținut $(-8)\circ 0=-8$.

c) Ideea: scriem egalitatea $x\circ a=a$ cu ajutorul definiției, o aducem la forma unui produs egal cu 0 și impunem să fie adevărată pentru orice x.
Aplicăm definiția legii pentru $y=a$:
$x\circ a=xa+8x+8a+56$
Egalitatea $x\circ a=a$ devine:
$xa+8x+8a+56=a$
Trecem a în membrul stâng:
$xa+8x+7a+56=0$
Dăm factor comun x din primii doi termeni și 7 din ultimii doi:
$x(a+8)+7(a+8)=0$
$(a+8)(x+7)=0$
Egalitatea trebuie să fie adevărată pentru orice număr real x, deci și pentru $x=0$: $7(a+8)=0$, de unde $a=-8$.
Verificăm că $a=-8$ convine: $x\circ(-8)=x\cdot(-8)+8x+8\cdot(-8)+56=-8x+8x-64+56=-8$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
Numărul căutat este $a=-8$.
R: a) $1\circ(-3)=37$**; b)** $x\circ y=y\circ x$**, pentru orice** $x,y\in\mathbb{R}$**, și** $(-8)\circ 0=-8$**; c)** $a=-8$

SUBIECTUL al III-lea

III.1 **a)** Funcția f este diferența dintre produsul $(x+1)e^x$ și constanta 3; derivata unei constante este 0.
Reamintim regula de derivare a produsului: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$.
Luăm $u(x)=x+1$ și $v(x)=e^x$, cu $u'(x)=1$ și $v'(x)=e^x$.
$f'(x)=(x+1)'\cdot e^x+(x+1)\cdot(e^x)'-(3)'$
$=1\cdot e^x+(x+1)e^x-0$
Dăm factor comun e^x:
$=e^x(1+x+1)$
$=(x+2)e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$
Am arătat că $f'(x)=(x+2)e^x$.

b) Reamintim: ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0 este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Aici $x_0 = 0$. Calculăm valoarea funcției, folosind $e^0 = 1$:
$f(0) = (0+1)\cdot e^0 - 3 = 1 - 3 = -2$
Calculăm valoarea derivatei, folosind a):
$f'(0) = (0+2)\cdot e^0 = 2$
Înlocuim în ecuația tangentei:
$y - (-2) = 2(x - 0)$
$y + 2 = 2x$
$y = 2x - 2$
Ecuația tangentei este $y = 2x - 2$.

c) Ideea: tangenta este paralelă cu axa Ox exact atunci când panta ei este 0, iar panta tangentei în punctul de abscisă a este $f'(a)$; deci rezolvăm ecuația $f'(a) = 0$.
Reamintim: panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă a este $f'(a)$, iar două drepte distincte, neverticale, sunt paralele dacă și numai dacă au aceeași pantă.
Axa Ox are panta 0, deci punem condiția $f'(a) = 0$.
Folosim a):
$(a+2)e^a = 0$
Pentru orice număr real a avem $e^a > 0$, deci $e^a \neq 0$.
Un produs de numere reale este 0 dacă și numai dacă cel puțin unul dintre factori este 0, deci:
$a + 2 = 0$, adică $a = -2$
În acest punct, $f(-2) = (-2+1)e^{-2} - 3 = -\dfrac{1}{e^2} - 3 \neq 0$, deci tangenta $y = -\dfrac{1}{e^2} - 3$ este paralelă cu axa Ox și nu coincide cu ea.
Abscisa căutată este $x = -2$.
R: a) $f'(x) = (x+2)e^x$**; b)** $y = 2x - 2$**; c)** $x = -2$

III.2

a) Reamintim: $\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$, $\int k\cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ și $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$, $n \neq -1$.
Integrăm termen cu termen:
$\int f(x)\,dx = 6\int x^2\,dx - 24\int x\,dx + 18\int 1\,dx$
Aplicăm formula pentru $n = 2$ și pentru $n = 1$:
$= 6\cdot\dfrac{x^3}{3} - 24\cdot\dfrac{x^2}{2} + 18x + \mathcal{C}$
Simplificăm fracțiile:
$= 2x^3 - 12x^2 + 18x + \mathcal{C}$
Verificăm prin derivare: $(2x^3 - 12x^2 + 18x)' = 6x^2 - 24x + 18 = f(x)$.
Am arătat că $\int f(x)\,dx = 2x^3 - 12x^2 + 18x + \mathcal{C}$.

b) Reamintim: oricare două primitive ale aceleiași funcții pe $\mathbb{R}$ diferă printr-o constantă.
Din a), primitivele funcției f sunt funcțiile de forma:
$F(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + c$, unde c este număr real
Calculăm $F(0)$:
$F(0) = 2\cdot 0^3 - 12\cdot 0^2 + 18\cdot 0 + c = c$
Din condiția $F(0) = 4$ obținem:
$c = 4$
Verificăm: $F(0) = 0 - 0 + 0 + 4 = 4$.
Primitiva căutată este $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 4$.

c) Ideea: derivata oricărei primitive F este chiar f, deci monotonia lui F pe $[1,3]$ este dată de semnul funcției f pe acest interval.

Fie F o primitivă a funcției f. Atunci F este derivabilă și $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Studiem semnul funcției f. Dăm factor comun 6:

$f(x)=6(x^2-4x+3)$

Rezolvăm ecuația $x^2-4x+3=0$: $\Delta=16-12=4$, deci $x_1=\dfrac{4-2}{2}=1$ și $x_2=\dfrac{4+2}{2}=3$.

Scriem descompunerea în factori:

$f(x)=6(x-1)(x-3)$

Pentru $x\in[1,3]$ avem $x-1\geq 0$ și $x-3\leq 0$, deci $(x-1)(x-3)\leq 0$.

Rezultă $F'(x)=f(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,3]$.

Reamintim: dacă derivata unei funcții este mai mică sau egală cu 0 pe un interval, funcția este descrescătoare pe acel interval.

Deci F este descrescătoare pe $[1,3]$.

Primitiva F a fost aleasă oarecare, deci am arătat că orice primitivă a funcției f este descrescătoare pe intervalul $[1,3]$.

R: a) $\int f(x)\,dx=2x^3-12x^2+18x+\mathcal{C}$**; b)** $F(x)=2x^3-12x^2+18x+4$**; c)** $F'(x)=f(x)=6(x-1)(x-3)\leq 0$**, pentru orice** $x\in[1,3]$

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Simularea 46

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1=4$ și rația $r=5$. Calculați a_8.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+9$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=a$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+2}-2^x=24$.
5p	**4.** După o scumpire cu 25%, un produs costă 450 de lei. Determinați prețul produsului înainte de scumpire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,5)$, $B(-2,8)$ și $C(-7,7)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în A.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $\measuredangle B=30^\circ$ și $BC=40$. Determinați lungimea catetei AC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ și $M(x)=\begin{pmatrix}x & x+3\\ 2 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\big(M(-1)\big)=-3$.
5p	**b)** Arătați că $A\cdot A-3A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\big(A\cdot M(x)\big)=-6$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2xy+6x+6y+17$.
5p	**a)** Arătați că $(-2)\circ 6=17$.
5p	**b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=7$.
5p	**c)** Arătați că $x\circ(-x-6)\leq -1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-2x+3$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=e^x-2$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.
5p	**c)** Arătați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x+5+\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2\big(f(x)-\ln x\big)\,dx=14$.

5p	**b)** Arătați că $\int_1^e (2x-1)\left(f(x)-6x-5\right)dx=\dfrac{e^2-1}{2}$.
5p	**c)** Determinați numărul real m, $m>1$, pentru care $\int_1^m \left(f(x)-\ln x\right)dx=34$.

Simularea 46 · Rezolvări și barem

octavianghetu.ro

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simularea 46

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_8 = a_1 + 7r = 4 + 7 \cdot 5$	**3p**
	$a_8 = 39$	**2p**
2.	$2a + 9 = a$	**3p**
	$a = -9$	**2p**
3.	$2^x(4-1) = 24$, deci $2^x = 8$	**3p**
	$x = 3$	**2p**
4.	$p + \dfrac{25}{100}p = 450$	**3p**
	$p = 360$ de lei	**2p**
5.	$AB^2 = 13$, $AC^2 = 13$ și $BC^2 = 26$	**3p**
	$AB^2 + AC^2 = BC^2$, deci triunghiul este dreptunghic în A	**2p**
6.	$\sin B = \dfrac{AC}{BC}$, deci $\dfrac{1}{2} = \dfrac{AC}{40}$	**3p**
	$AC = 20$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\big(M(-1)\big) = (-1)\cdot(-1) - 2\cdot 2 = 1 - 4$	**3p**
	$\det\big(M(-1)\big) = -3$	**2p**
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	**3p**
	$A \cdot A - 3A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	**2p**
c)	$\det A = 2$ și $\det\big(M(x)\big) = x^2 - 2x - 6$	**2p**
	$2\left(x^2 - 2x - 6\right) = -6 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$, deci $x \in \{-1, 3\}$	**3p**
2.a)	$(-2) \circ 6 = -24 - 12 + 36 + 17$	**3p**
	$(-2) \circ 6 = 17$	**2p**
b)	$x \circ x = 2x^2 + 12x + 17$	**2p**
	$x^2 + 6x + 5 = 0$, deci $x \in \{-5, -1\}$	**3p**

c)	$x \circ (-x-6) = -2x^2 - 12x - 19$	**3p**
	$-2x^2 - 12x - 19 = -2(x+3)^2 - 1 \leq -1$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$(e^x)' = e^x$, $(2x)' = 2$ și $(3)' = 0$	**3p**
	$f'(x) = e^x - 2$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$	**3p**
	$f'(1) = e - 2$	**2p**
c)	$f''(x) = e^x$	**3p**
	$f''(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci f este convexă pe $\mathbb{R}$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 (6x+5)\,dx = \left(3x^2 + 5x\right)\Big\vert_1^2$	**3p**
	$22 - 8 = 14$	**2p**
b)	$\int_1^e (2x-1)\ln x\,dx = \left(x^2 - x\right)\ln x\Big\vert_1^e - \int_1^e (x-1)\,dx$	**3p**
	$e^2 - e - \left(\dfrac{e^2}{2} - e + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{e^2-1}{2}$	**2p**
c)	$\int_1^m (6x+5)\,dx = 3m^2 + 5m - 8$	**3p**
	$3m^2 + 5m - 42 = 0$, cu $m > 1$, deci $m = 3$	**2p**

Rezolvări explicate

SUBIECTUL I

I.1 Reamintim formula termenului general al unei progresii aritmetice: $a_n = a_1 + (n-1)r$.
Aplicăm formula pentru $n = 8$:
$a_8 = a_1 + (8-1) \cdot r$
$= a_1 + 7r$
Înlocuim $a_1 = 4$ și $r = 5$:
$a_8 = 4 + 7 \cdot 5$
$= 4 + 35 = 39$
Verificăm scriind termenii: 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39; al optulea termen este 39.
Termenul căutat este $a_8 = 39$.

R: $a_8 = 39$

I.2 Calculăm $f(a)$, înlocuind $x = a$ în formula funcției:
$f(a) = 2a + 9$
Scriem condiția din enunț:
$2a + 9 = a$
Trecem termenii cu a în membrul stâng și numerele în membrul drept:
$2a - a = -9$
$a = -9$
Verificăm: $f(-9) = 2 \cdot (-9) + 9 = -18 + 9 = -9$.
Numărul real căutat este $a = -9$.

R: $a = -9$

I.3 Ecuația este definită pentru orice număr real x.
Reamintim proprietatea puterilor: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, deci $2^{x+2} = 2^2 \cdot 2^x = 4 \cdot 2^x$.
Ecuația devine:
$4 \cdot 2^x - 2^x = 24$
Dăm factor comun 2^x:
$2^x(4-1) = 24$
$3 \cdot 2^x = 24$
$2^x = 8$
Scriem 8 ca putere a lui 2: $8 = 2^3$, deci $2^x = 2^3$.
Funcția exponențială este injectivă, deci egalăm exponenții: $x = 3$.
Verificăm: $2^5 - 2^3 = 32 - 8 = 24$.
Soluția ecuației este $x = 3$.

R: $x = 3$

I.4 Notăm cu p prețul inițial al produsului, în lei.

Reamintim: a scumpi un preț cu 25% înseamnă a adăuga la el $\frac{25}{100}$ din valoarea lui.

După scumpire, prețul devine:

$p + \frac{25}{100}p = \frac{125}{100}p$

Scriem condiția din enunț:

$\frac{125}{100}p = 450$

$p = \frac{450 \cdot 100}{125} = \frac{45000}{125} = 360$

Verificăm: 25% din 360 de lei înseamnă $\frac{25}{100} \cdot 360 = 90$ de lei, iar $360 + 90 = 450$.

Prețul produsului înainte de scumpire era de 360 de lei.

R: 360 de lei

I.5 Ideea: calculăm pătratele lungimilor laturilor și aplicăm reciproca teoremei lui Pitagora.

Reamintim distanța dintre două puncte: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Calculăm pătratele lungimilor laturilor:

$AB^2 = (-2 + 4)^2 + (8 - 5)^2 = 4 + 9 = 13$

$AC^2 = (-7 + 4)^2 + (7 - 5)^2 = 9 + 4 = 13$

$BC^2 = (-7 + 2)^2 + (7 - 8)^2 = 25 + 1 = 26$

Observăm că $AB^2 + AC^2 = 13 + 13 = 26 = BC^2$.

Reamintim reciproca teoremei lui Pitagora: dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic în A.

Am arătat că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

R: $AB^2 + AC^2 = 13 + 13 = 26 = BC^2$**, deci triunghiul** ABC **este dreptunghic în** A

I.6 Triunghiul este dreptunghic în A, deci BC este ipotenuza, iar AC este cateta opusă unghiului B.

Reamintim: în triunghiul dreptunghic, sinusul unui unghi ascuțit este raportul dintre cateta opusă și ipotenuză.

Scriem $\sin B = \frac{AC}{BC}$.

Reamintim valoarea remarcabilă $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Înlocuim:

$\frac{1}{2} = \frac{AC}{40}$

$AC = \frac{40}{2} = 20$

Regăsim proprietatea cunoscută: cateta opusă unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză.

Lungimea catetei AC este egală cu 20.

R: $AC = 20$

SUBIECTUL al II-lea

II.1 **a)** Înlocuim $x=-1$ în matricea $M(x)$:

$M(-1)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

Reamintim determinantul unei matrice de ordinul 2: $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$.

Aplicăm formula:

$\det\big(M(-1)\big)=(-1)\cdot(-1)-2\cdot 2$

$=1-4$

$=-3$

Am arătat că $\det\big(M(-1)\big)=-3$.

b) Reamintim produsul a două matrice de ordinul 2: $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}m & n\\ p & q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}am+bp & an+bq\\ cm+dp & cn+dq\end{pmatrix}$.

Calculăm $A\cdot A$:

$A\cdot A=\begin{pmatrix}0\cdot 0+2\cdot(-1) & 0\cdot 2+2\cdot 3\\ (-1)\cdot 0+3\cdot(-1) & (-1)\cdot 2+3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -3 & 7\end{pmatrix}$

Reamintim: înmulțirea unei matrice cu un număr se face înmulțind fiecare element cu acel număr.

$3A=\begin{pmatrix}3\cdot 0 & 3\cdot 2\\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$

Reamintim: două matrice se scad element cu element.

Calculăm:

$A\cdot A-3A=\begin{pmatrix}-2-0 & 6-6\\ -3-(-3) & 7-9\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

Am arătat că $A\cdot A-3A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

c) Ideea: folosim proprietatea $\det(X\cdot Y)=\det X\cdot\det Y$, valabilă pentru orice matrice pătratice de ordinul 2, și obținem o ecuație de gradul al doilea.

Calculăm determinantul matricei A:

$\det A=0\cdot 3-2\cdot(-1)=0+2=2$

Calculăm determinantul matricei $M(x)$:

$\det\big(M(x)\big)=x\cdot x-(x+3)\cdot 2=x^2-2x-6$

Aplicăm proprietatea:

$\det\big(A\cdot M(x)\big)=2\left(x^2-2x-6\right)$

Ecuația devine:

$2\left(x^2-2x-6\right)=-6$

$x^2-2x-6=-3$

$x^2-2x-3=0$

Calculăm discriminantul: $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16$.

Rădăcinile sunt $x_{1,2}=\dfrac{2\pm 4}{2}$, adică $x_1=-1$ și $x_2=3$.

Verificăm: $\det\big(M(3)\big)=9-12=-3$, deci $\det\big(A\cdot M(3)\big)=2\cdot(-3)=-6$; la fel, $\det\big(M(-1)\big)=-3$ (de la a)).

Numerele reale căutate sunt $x=-1$ și $x=3$.

R: a) $\det\big(M(-1)\big)=-3$; **b)** $A\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -3 & 7\end{pmatrix}$, **deci** $A\cdot A-3A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$; **c)** $x\in\{-1,3\}$

II.2 **a)** Aplicăm definiția legii pentru $x=-2$ și $y=6$:
$(-2)\circ 6=2\cdot(-2)\cdot 6+6\cdot(-2)+6\cdot 6+17$
Calculăm fiecare termen: $2\cdot(-2)\cdot 6=-24$, $6\cdot(-2)=-12$, $6\cdot 6=36$.
$(-2)\circ 6=-24-12+36+17$
$=17$
Am arătat că $(-2)\circ 6=17$.

b) Aplicăm definiția legii pentru $y=x$:
$x\circ x=2x\cdot x+6x+6x+17=2x^2+12x+17$
Ecuația devine:
$2x^2+12x+17=7$
$2x^2+12x+10=0$
Împărțim prin 2:
$x^2+6x+5=0$
Calculăm discriminantul cu formula $\Delta=b^2-4ac$:
$\Delta=6^2-4\cdot 1\cdot 5=36-20=16$
Rădăcinile sunt $x_{1,2}=\dfrac{-6\pm 4}{2}$, adică $x_1=-5$ și $x_2=-1$.
Verificăm: $(-1)\circ(-1)=2-6-6+17=7$ și $(-5)\circ(-5)=50-30-30+17=7$.
Soluțiile ecuației sunt $x=-5$ și $x=-1$.

c) Ideea: calculăm expresia $x\circ(-x-6)$ și o scriem cu ajutorul unui pătrat perfect, care este mereu nenegativ.
Aplicăm definiția legii pentru $y=-x-6$:
$x\circ(-x-6)=2x(-x-6)+6x+6(-x-6)+17$
Desfacem parantezele:
$=-2x^2-12x+6x-6x-36+17$
$=-2x^2-12x-19$
Scriem expresia cu ajutorul unui pătrat perfect:
$-2x^2-12x-19=-2\left(x^2+6x+9\right)+18-19$
$=-2(x+3)^2-1$
Pentru orice număr real x avem $(x+3)^2\geq 0$, deci $-2(x+3)^2\leq 0$.
Obținem $x\circ(-x-6)=-2(x+3)^2-1\leq -1$.
Am arătat că $x\circ(-x-6)\leq -1$, pentru orice număr real x.
R: a) $(-2)\circ 6=17$**; b)** $x\in\{-5,-1\}$**; c)** $x\circ(-x-6)=-2(x+3)^2-1\leq -1$**, pentru orice** $x\in\mathbb{R}$

SUBIECTUL al III-lea

III.1 **a)** Reamintim regulile de derivare folosite: $(e^x)'=e^x$, $(x)'=1$, iar derivata unei constante este 0.
Derivăm termen cu termen:
$f'(x)=(e^x)'-2\cdot(x)'+(3)'$
$=e^x-2\cdot 1+0$
$=e^x-2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
Am arătat egalitatea cerută.

b) Reamintim definiția derivatei într-un punct: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$, atunci când f este derivabilă în a.
Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci și în punctul $a=1$; limita cerută este egală cu $f'(1)$.
Folosim formula derivatei de la a):

$f'(1) = e^1 - 2$
$= e - 2$
Deci:
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = e - 2$
Limita cerută este egală cu $e - 2$.

c) Ideea: o funcție de două ori derivabilă este convexă pe un interval dacă derivata a doua este nenegativă pe acel interval; calculăm f'' și îi studiem semnul.
Reamintim: dacă $f''(x) \geq 0$, pentru orice x dintr-un interval, atunci f este convexă pe acel interval.
Derivăm $f'(x) = e^x - 2$:
$f''(x) = (e^x)' - (2)'$
$= e^x - 0 = e^x$
Pentru orice număr real x avem $e^x > 0$.
Deci $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
Am arătat că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

R: a) $f'(x) = e^x - 2$**; b)** $e - 2$**; c)** $f''(x) = e^x > 0$**, pentru orice** $x \in \mathbb{R}$**, deci** f **este convexă pe** $\mathbb{R}$

III.2 **a)** Simplificăm funcția de sub integrală:
$f(x) - \ln x = 6x + 5$
Reamintim formula Leibniz–Newton: dacă G este o primitivă a funcției continue g pe $[a, b]$, atunci $\int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

O primitivă a funcției $6x + 5$ este $3x^2 + 5x$, deoarece $\left(3x^2 + 5x\right)' = 6x + 5$.
Aplicăm formula Leibniz–Newton:
$\int_1^2 (6x + 5)\,dx = \left(3x^2 + 5x\right)\Big|_1^2$
$= (12 + 10) - (3 + 5)$
$= 22 - 8 = 14$
Am arătat că $\int_1^2 \left(f(x) - \ln x\right) dx = 14$.

b) Simplificăm paranteza de sub integrală:
$f(x) - 6x - 5 = \ln x$
Deci integrala devine $\int_1^e (2x - 1) \ln x\,dx$.
Ideea: integrala unui produs dintre un polinom și $\ln x$ se calculează prin părți, derivând logaritmul.
Reamintim formula de integrare prin părți: $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$.

Alegem $u(x) = \ln x$, cu $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, și $v'(x) = 2x - 1$, cu $v(x) = x^2 - x$.

Aplicăm formula:
$\int_1^e (2x - 1) \ln x\,dx = \left(x^2 - x\right) \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \dfrac{1}{x} \cdot \left(x^2 - x\right) dx$
Calculăm primul termen, folosind $\ln e = 1$ și $\ln 1 = 0$:
$\left(x^2 - x\right) \ln x\Big|_1^e = \left(e^2 - e\right) \cdot 1 - 0 \cdot 0 = e^2 - e$

Simplificăm a doua integrală: $\dfrac{x^2 - x}{x} = x - 1$, deci
$\int_1^e (x - 1)\,dx = \left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^e = \dfrac{e^2}{2} - e - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{e^2}{2} - e + \dfrac{1}{2}$
Înlocuim:

$\int_1^e (2x-1)\ln x\,dx = e^2 - e - \dfrac{e^2}{2} + e - \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^2-1}{2}$

Am arătat că $\int_1^e (2x-1)\left(f(x) - 6x - 5\right)dx = \dfrac{e^2-1}{2}$.

c) Ideea: calculăm integrala în funcție de m și obținem o ecuație de gradul al doilea în m.
Ca la a), $f(x) - \ln x = 6x + 5$, cu primitiva $3x^2 + 5x$.
Aplicăm formula Leibniz–Newton:

$\int_1^m (6x+5)\,dx = \left(3x^2+5x\right)\Big|_1^m$

$= 3m^2 + 5m - 8$

Ecuația din enunț devine:

$3m^2 + 5m - 8 = 34$

$3m^2 + 5m - 42 = 0$

Calculăm discriminantul: $\Delta = 5^2 - 4\cdot 3\cdot(-42) = 25 + 504 = 529 = 23^2$.

Rădăcinile sunt $m_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 23}{6}$, adică $m_1 = -\dfrac{14}{3}$ și $m_2 = 3$.

Valoarea $m = -\dfrac{14}{3}$ nu convine, deoarece nu verifică condiția $m > 1$.

Verificăm: $3\cdot 9 + 5\cdot 3 - 8 = 27 + 15 - 8 = 34$.
Numărul real căutat este $m = 3$.

R: a) 14; **b)** $\dfrac{e^2-1}{2}$; **c)** $m = 3$

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Simularea 100

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\log_2 32 - \log_5 25 = 3$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+8$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=a$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x-1)=\log_2(x+2)$.
5p	**4.** Un produs costă 400 de lei. Determinați prețul produsului după ce acesta se ieftinește cu 40%.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$ și $B(-2,1)$. Determinați distanța de la originea O a reperului la mijlocul M al segmentului AB.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $B=45^\circ$ și $AB=9$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ și $M(x)=\begin{pmatrix}x+3 & 1\\ 3 & x+3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\big(M(3)\big)=33$.
5p	**b)** Arătați că $A\cdot M(0)=\begin{pmatrix}15 & 9\\ 9 & 3\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Arătați că, pentru orice număr natural n, numărul $\det\big(M(n)\big)+3$ este pătratul unui număr natural.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2-6X+3$, unde m este număr real, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.
5p	**a)** Arătați că $f(1)-f(-1)=-10$, pentru orice număr real m.
5p	**b)** Determinați numărul real m pentru care $x=1$ este rădăcină a polinomului f.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care $(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)=9$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^x+3$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=(x+2)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.
5p	**c)** Arătați că $f(x)\geq 3-\dfrac{1}{e^2}$, pentru orice număr real x.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+4x+\dfrac{2x}{x^2+9}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{2x}{x^2+9}\right)dx=3$.

5p	**b)** Arătați că $\int_0^4 \left(f(x)-3x^2-4x\right)dx=\ln\dfrac{25}{9}$.
5p	**c)** Determinați numărul real a, $a>0$, pentru care $\int_0^a \left(f(x)-3x^2-4x\right)dx=\ln 2$.

Simularea 100 · Rezolvări și barem

octavianghetu.ro

Simulare pentru examenul național de bacalaureat
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simularea 100

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2 32 = 5$ și $\log_5 25 = 2$	**3p**
	$5 - 2 = 3$	**2p**
2.	$f(a) = a \Leftrightarrow 5a + 8 = a$	**3p**
	$a = -2$	**2p**
3.	$2x - 1 = x + 2$	**3p**
	$x = 3$, care verifică condițiile de existență	**2p**
4.	$\frac{40}{100} \cdot 400 = 160$ de lei	**3p**
	$400 - 160 = 240$ de lei	**2p**
5.	$M(0, 3)$	**3p**
	$OM = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$	**2p**
6.	$AC = AB = 9$	**3p**
	$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{9 \cdot 9}{2} = \frac{81}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(3) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	**3p**
	$\det\left(M(3)\right) = 6 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 33$	**2p**
b)	$M(0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	**2p**
	$A \cdot M(0) = \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$	**3p**
c)	$\det\left(M(n)\right) = (n+3)^2 - 3$	**3p**
	$\det\left(M(n)\right) + 3 = (n+3)^2$, cu $n + 3 \in \mathbb{N}$	**2p**
2.a)	$f(1) = m - 2$ și $f(-1) = m + 8$	**3p**
	$f(1) - f(-1) = (m - 2) - (m + 8) = -10$	**2p**

b)	$f(1)=0 \Leftrightarrow m-2=0$	**3p**
	$m=2$	**2p**
c)	$(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)=f(-1)=m+8$	**3p**
	$m+8=9 \Leftrightarrow m=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1\cdot e^x+(x+1)e^x$	**3p**
	$f'(x)=(x+2)e^x$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$	**3p**
	$f'(0)=2$	**2p**
c)	$f'(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,-2)$ și $f'(x)>0$ pentru $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
	$x=-2$ este punct de minim, deci $f(x)\geq f(-2)=3-\dfrac{1}{e^2}$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(3x^2+4x\right)dx=\left(x^3+2x^2\right)\Big\vert_0^1$	**3p**
	$3-0=3$	**2p**
b)	$\int_0^4\dfrac{2x}{x^2+9}dx=\ln\left(x^2+9\right)\Big\vert_0^4$	**3p**
	$\ln 25-\ln 9=\ln\dfrac{25}{9}$	**2p**
c)	$\int_0^a\dfrac{2x}{x^2+9}dx=\ln\dfrac{a^2+9}{9}$	**3p**
	$a^2+9=18$, cu $a>0$, deci $a=3$	**2p**

Rezolvări explicate

SUBIECTUL I

I.1 Reamintim: pentru $a > 0$, $a \neq 1$, avem $\log_a a^k = k$.

Scriem argumentele ca puteri ale bazelor:

$32 = 2^5$, deci $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

$25 = 5^2$, deci $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$

Efectuăm scăderea:

$\log_2 32 - \log_5 25 = 5 - 2 = 3$

Am arătat că $\log_2 32 - \log_5 25 = 3$.

R: $5 - 2 = 3$

I.2 Calculăm $f(a)$, înlocuind x cu a în formula funcției:

$f(a) = 5a + 8$

Scriem ecuația $f(a) = a$:

$5a + 8 = a$

Trecem termenii cu a în membrul stâng:

$4a = -8$

$a = -2$

Verificăm: $f(-2) = 5 \cdot (-2) + 8 = -2$.

Numărul căutat este $a = -2$.

R: $a = -2$

I.3 Condițiile de existență ale logaritmilor: argumentele trebuie să fie strict pozitive.

Din $2x - 1 > 0$, adică $x > \dfrac{1}{2}$, iar din $x + 2 > 0$, adică $x > -2$; ambele condiții sunt îndeplinite pentru $x > \dfrac{1}{2}$.

Reamintim: pentru $b > 0$, $b \neq 1$, avem $\log_b u = \log_b v$ dacă și numai dacă $u = v$ (cu $u, v > 0$).

Egalăm argumentele:

$2x - 1 = x + 2$

$x = 3$

Verificăm condiția: $3 > \dfrac{1}{2}$; argumentele devin 5 și 5, egale și pozitive.

Soluția ecuației este $x = 3$.

R: $x = 3$

I.4 Reamintim: $p\%$ dintr-o valoare a înseamnă $\dfrac{p}{100} \cdot a$.

Calculăm valoarea ieftinirii, adică 40% din 400 de lei:

$\dfrac{40}{100} \cdot 400 = 160$ de lei

La ieftinire prețul scade cu această sumă:

$400 - 160 = 240$ de lei

Verificăm altfel: după ieftinire produsul costă 60% din prețul inițial, iar $\dfrac{60}{100} \cdot 400 = 240$.

Prețul produsului după ieftinire este de 240 de lei.

R: 240 de lei

I.5 Reamintim formula mijlocului unui segment: $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Calculăm coordonatele mijlocului:

$x_M = \dfrac{2 + (-2)}{2} = 0$ și $y_M = \dfrac{5 + 1}{2} = 3$, deci $M(0, 3)$.

Reamintim formula distanței: $OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2}$, unde $O(0, 0)$.

$OM = \sqrt{(0 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{9} = 3$

Observăm că punctul $M(0, 3)$ se află pe axa Oy, la distanța 3 de origine.

Distanța de la O la mijlocul segmentului AB este $OM = 3$.

R: $OM = 3$

I.6 În triunghiul ABC, dreptunghic în A, avem $C = 90^\circ - B = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Unghiurile B și C sunt egale, deci triunghiul este isoscel, cu catetele egale: $AC = AB = 9$.

Altfel: $\operatorname{tg} B = \dfrac{AC}{AB}$ și $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, deci $AC = AB = 9$.

Reamintim: aria unui triunghi dreptunghic este jumătate din produsul catetelor.

$\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} = \dfrac{9 \cdot 9}{2} = \dfrac{81}{2}$

Aria triunghiului ABC este $\dfrac{81}{2}$.

R: $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{81}{2}$

SUBIECTUL al II-lea

II.1 **a)** Înlocuim $x=3$ în matricea $M(x)$:

$M(3)=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

Reamintim: pentru o matrice de ordinul 2, $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$.

Aplicăm formula:

$\det\big(M(3)\big)=\begin{vmatrix}6 & 1\\ 3 & 6\end{vmatrix}=6\cdot 6-1\cdot 3$

$=36-3=33$

Am arătat că $\det\big(M(3)\big)=33$.

b) Înlocuim $x=0$ în matricea $M(x)$:

$M(0)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

Reamintim produsul a două matrice de ordinul 2: $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}m & n\\ p & q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}am+bp & an+bq\\ cm+dp & cn+dq\end{pmatrix}$.

Înmulțim fiecare linie a lui A cu fiecare coloană a lui $M(0)$:

$A\cdot M(0)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3\cdot 3+2\cdot 3 & 3\cdot 1+2\cdot 3\\ 3\cdot 3+0\cdot 3 & 3\cdot 1+0\cdot 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}15 & 9\\ 9 & 3\end{pmatrix}$

Am arătat că $A\cdot M(0)=\begin{pmatrix}15 & 9\\ 9 & 3\end{pmatrix}$.

c) Ideea: calculăm $\det\big(M(n)\big)$ în funcție de n și observăm că, adunând 3, obținem un pătrat perfect.

Folosim formula determinantului de ordinul 2, $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$:

$\det\big(M(n)\big)=\begin{vmatrix}n+3 & 1\\ 3 & n+3\end{vmatrix}=(n+3)(n+3)-1\cdot 3$

$=(n+3)^2-3$

Adunăm 3:

$\det\big(M(n)\big)+3=(n+3)^2-3+3=(n+3)^2$

Pentru n număr natural, $n+3$ este tot un număr natural.

De exemplu, pentru $n=3$ regăsim a): $\det\big(M(3)\big)+3=33+3=36=6^2$.

Am arătat că, pentru orice număr natural n, $\det\big(M(n)\big)+3=(n+3)^2$ este pătratul numărului natural $n+3$.

R: a) $\det\big(M(3)\big)=33$; **b)** $A\cdot M(0)=\begin{pmatrix}15 & 9\\ 9 & 3\end{pmatrix}$; **c)** $\det\big(M(n)\big)+3=(n+3)^2$, **pătratul numărului natural** $n+3$

II.2 **a)** Calculăm valorile polinomului în 1 și în -1, în funcție de m:
$f(1) = 1^3 + m \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = 1 + m - 6 + 3 = m - 2$
$f(-1) = (-1)^3 + m \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 3 = -1 + m + 6 + 3 = m + 8$
Efectuăm scăderea:
$f(1) - f(-1) = (m - 2) - (m + 8)$
$= m - 2 - m - 8 = -10$
Rezultatul nu depinde de m.
Am arătat că $f(1) - f(-1) = -10$, pentru orice număr real m.

b) Reamintim: numărul a este rădăcină a polinomului f dacă și numai dacă $f(a) = 0$.
Din a), $f(1) = m - 2$.
Punem condiția $f(1) = 0$:
$m - 2 = 0$
$m = 2$
Verificăm: pentru $m = 2$, $f(1) = 1 + 2 - 6 + 3 = 0$.
Numărul căutat este $m = 2$.

c) Ideea: scriem polinomul cu ajutorul rădăcinilor și observăm că produsul din enunț este valoarea polinomului în -1.
Reamintim: un polinom de gradul 3, cu coeficientul dominant 1 și rădăcinile x_1, x_2, x_3, se scrie $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$.
Înlocuim $X = -1$:
$f(-1) = (-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3)$
Din a), $f(-1) = m + 8$.
Condiția din enunț devine:
$m + 8 = 9$
$m = 1$
Verificăm: pentru $m = 1$, $f(-1) = -1 + 1 + 6 + 3 = 9$.
Numărul căutat este $m = 1$.

R: a) $f(1) - f(-1) = (m - 2) - (m + 8) = -10$**; b)** $m = 2$**; c)** $m = 1$

SUBIECTUL al III-lea

III.1 **a)** Reamintim regula de derivare a produsului: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, și derivata $(e^x)' = e^x$.
Pentru produsul $(x + 1)e^x$ alegem $u(x) = x + 1$, cu $u'(x) = 1$, și $v(x) = e^x$, cu $v'(x) = e^x$.
Derivata constantei 3 este 0.
Aplicăm regula:
$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x + 0$
$= e^x + xe^x + e^x$
$= (x + 2)e^x$
Am arătat că $f'(x) = (x + 2)e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Reamintim definiția derivatei într-un punct: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Pentru $x_0 = 0$, limita din enunț este exact $f'(0)$:
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$
Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar derivata ei este cea de la a).
Calculăm, folosind $e^0 = 1$:
$f'(0) = (0 + 2) \cdot e^0 = 2 \cdot 1 = 2$

Deci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2$.

c) Ideea: studiem monotonia funcției f cu semnul derivatei și arătăm că valoarea minimă a lui f este $f(-2)=3-\dfrac{1}{e^2}$.

Reamintim: dacă $f'(x)<0$ pe un interval, atunci f este strict descrescătoare pe acel interval; dacă $f'(x)>0$, atunci f este strict crescătoare.
Rezolvăm ecuația $f'(x)=0$: $(x+2)e^x=0$; cum $e^x>0$, obținem $x=-2$.
Semnul lui $f'(x)$ este semnul lui $x+2$, deoarece $e^x>0$.
Pentru $x\in(-\infty,-2)$, avem $f'(x)<0$, deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty,-2]$.
Pentru $x\in(-2,+\infty)$, avem $f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare pe $[-2,+\infty)$.
Rezultă că $x=-2$ este punct de minim al funcției f, deci $f(x)\geq f(-2)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
Calculăm valoarea minimă:

$$f(-2)=(-2+1)e^{-2}+3=-\frac{1}{e^2}+3=3-\frac{1}{e^2}$$

Am arătat că $f(x)\geq 3-\dfrac{1}{e^2}$, pentru orice număr real x.

R: a) $f'(x)=(x+2)e^x$**; b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=2$**; c)** $f(x)\geq f(-2)=3-\dfrac{1}{e^2}$**, pentru orice** $x\in\mathbb{R}$

III.2 **a)** Simplificăm integrandul:

$$f(x)-\frac{2x}{x^2+9}=3x^2+4x$$

Reamintim formula Leibniz–Newton: dacă G este o primitivă a funcției continue g pe $[a,b]$, atunci $\int_a^b g(x)\,dx=G(b)-G(a)$.

Folosim $\int x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq -1$: o primitivă a funcției $3x^2+4x$ este x^3+2x^2.
Aplicăm formula Leibniz–Newton:

$$\int_0^1\left(3x^2+4x\right)dx=\left(x^3+2x^2\right)\Big|_0^1$$

$$=(1+2)-0=3$$

Am arătat că $\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{2x}{x^2+9}\right)dx=3$.

b) Simplificăm integrandul:

$$f(x)-3x^2-4x=\frac{2x}{x^2+9}$$

Observăm că derivata numitorului este numărătorul: $\left(x^2+9\right)'=2x$.

Reamintim: o primitivă a funcției $\dfrac{u'}{u}$, cu $u>0$, este $\ln u$.

Aici $u(x)=x^2+9>0$, deci o primitivă a funcției $\dfrac{2x}{x^2+9}$ este $\ln\left(x^2+9\right)$.

Aplicăm formula Leibniz–Newton:

$$\int_0^4\frac{2x}{x^2+9}\,dx=\ln\left(x^2+9\right)\Big|_0^4=\ln 25-\ln 9$$

Folosim proprietatea $\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}$:

$\ln 25 - \ln 9 = \ln \dfrac{25}{9}$

Am arătat că $\int_0^4 \left(f(x) - 3x^2 - 4x\right) dx = \ln \dfrac{25}{9}$.

c) Ideea: calculăm integrala în funcție de a, ca la b), și rezolvăm ecuația obținută.

Folosim primitiva $\ln\left(x^2+9\right)$ a funcției $f(x) - 3x^2 - 4x = \dfrac{2x}{x^2+9}$ și formula Leibniz–Newton:

$\int_0^a \dfrac{2x}{x^2+9}\, dx = \ln\left(x^2+9\right)\Big|_0^a = \ln\left(a^2+9\right) - \ln 9 = \ln \dfrac{a^2+9}{9}$

Scriem ecuația:

$\ln \dfrac{a^2+9}{9} = \ln 2$

Funcția logaritm este injectivă, deci egalăm argumentele:

$\dfrac{a^2+9}{9} = 2$

$a^2 + 9 = 18$, adică $a^2 = 9$

Obținem $a = -3$ sau $a = 3$; cum $a > 0$, soluția $a = -3$ nu convine.

Verificăm: $\ln \dfrac{9+9}{9} = \ln 2$.

Numărul căutat este $a = 3$.

R: a) $\left(x^3 + 2x^2\right)\Big|_0^1 = 3$; **b)** $\ln\left(x^2+9\right)\Big|_0^4 = \ln \dfrac{25}{9}$; **c)** $a = 3$

AI VĂZUT 3 DIN 105

Vrei toate simulările, cu rezolvări și barem?

În culegere primești:

- **105 simulări**, de la primii paşi până la nivelul examenului;
- după fiecare, **baremul** şi **rezolvarea explicată** a fiecărui exercițiu;
- PDF cu numele tău, îl păstrezi pentru totdeauna.

Cumpără culegerea